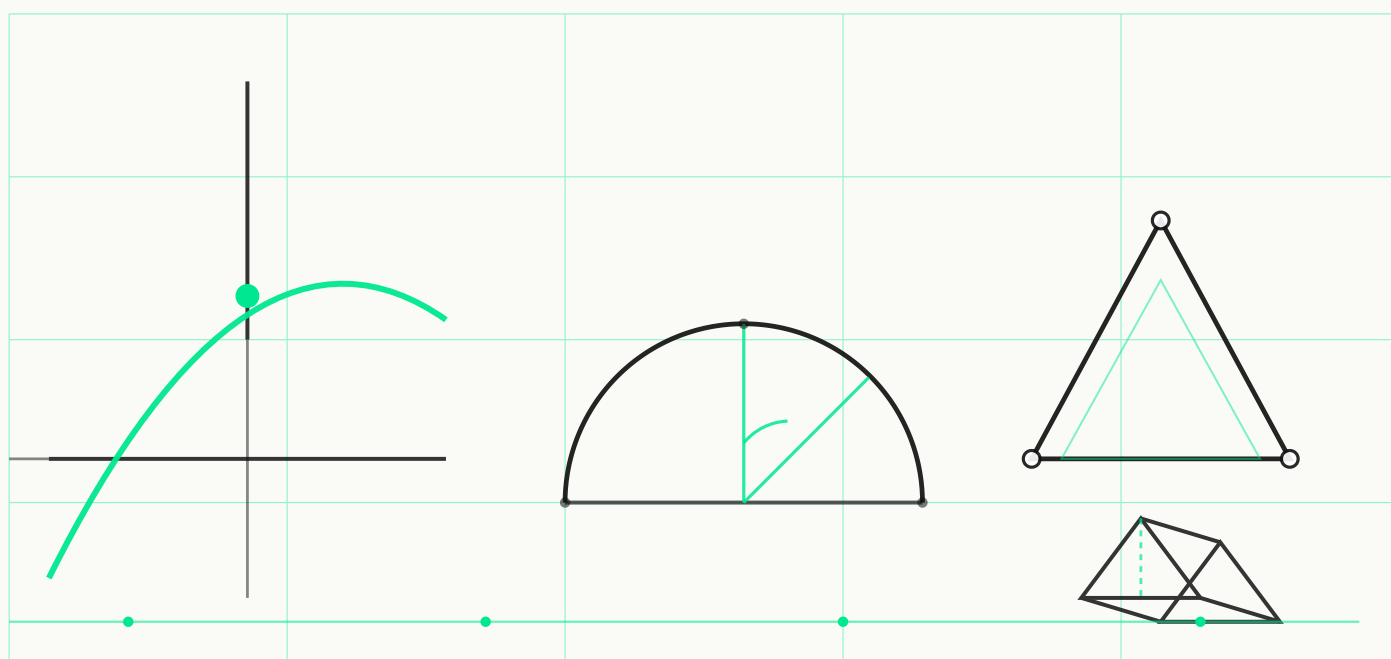


MATEMÁTICA

Seis assuntos com teoria, exercício resolvido e questão para praticar, mais os macetes de estimativa que decidem questão sem terminar a conta.



O QUE TEM AQUI DENTRO

OS SEIS ASSUNTOS

01	Números, operações e raciocínio	05
	Como operar com número em contexto, quando o enunciado não ensina a conta que ele espera.	
02	Razão, proporção e regra de três	15
	Como comparar duas grandezas e, a partir dessa comparação, descobrir uma terceira que o enunciado não deu.	
03	Porcentagem, probabilidade e combinatória	25
	Quanto disso existe, sobre quanto existe no total.	
04	Geometria plana e espacial	35
	Medir e comparar forma, área e volume, quando o enunciado dá alguns valores e esconde o resto.	
05	Funções, sequências e matemática financeira	45
	Como uma grandeza varia com o tempo ou com a posição, e o que isso permite prever.	
06	Estatística e leitura de gráficos e tabelas	55
	Ler e resumir um conjunto de dados antes de calcular qualquer coisa.	

PARA CONSULTAR A QUALQUER MOMENTO

	Como usar esta apostila	03
	Mapa de conexões entre os assuntos	04
	Formulário	65
	Todas as fórmulas do material, agrupadas por assunto.	
	Gabarito comentado	69
	Resposta e motivo do erro das 24 questões de praticar.	

QUATRO PASSOS, NESTA ORDEM

- 01 Tente antes de ler a resolução.** Cada exercício resolvido traz o enunciado completo antes do passo a passo. Cubra a resolução com a mão e tente sozinho. Errar na tentativa não tem custo, e é o que mostra onde a teoria precisa entrar.
- 02 Leia a teoria quando precisar dela.** As três páginas de teoria de cada assunto não são para decorar de uma vez. Elas são para consultar quando um exercício travar, e é nesse momento que elas fazem sentido.
- 03 Pratique sem olhar a resposta.** As quatro questões de cada assunto não têm gabarito ao lado, de propósito. O gabarito comentado fica no fim, a partir da página 69.
- 04 Volte ao que errou depois de alguns dias.** Errar na primeira tentativa é normal. Errar de novo na segunda é o sinal de que a teoria daquele ponto precisa de outra leitura.

AVISO DE ESCOPO

Esta apostila cobre o recorte que a análise de 11 edições do ENEM, de 2015 a 2025, aponta como o mais recorrente. Ela não é a lista completa do currículo de Matemática do ensino médio, e não pretende ser. O que está aqui é o que mais vale estudar quando o tempo é curto.

O QUE TEM DENTRO DE CADA ASSUNTO

Os seis assuntos seguem sempre a mesma sequência de dez páginas. Depois do primeiro você já sabe o que esperar de cada virada.

PÁGINAS	O QUE É
1	Abertura, com o que o assunto responde e o que estudar primeiro
2 a 4	Teoria, em três páginas que se sustentam sozinhas
5	Dica do Prof, com os macetes e o mnemônico do assunto
6 e 7	Dois exercícios resolvidos, passo a passo
8	Onde a prova derruba, com as pegadinhas nomeadas
9 e 10	Quatro questões para praticar, sem resposta ao lado

COMO UM SE APOIA NO OUTRO

Os capítulos de Matemática se apoiam uns nos outros. O volume de um cilindro depende do quadrado do raio, que é o mesmo expoente da escala de área. A leitura de um gráfico de tendência depende de saber ler taxa de variação, que vem de função afim.



GUARDE ISTO

A ordem desta apostila segue o uso, e não o índice de um livro. Cada assunto aparece depois daquilo de que ele precisa, e o último usa todos os anteriores.

NÚMEROS, OPERAÇÕES E RACIOCÍNIO



Como operar com número em contexto, quando o enunciado não ensina a conta que ele espera.

12%

das questões de Matemática do ENEM nas últimas 11 edições, de 2015 a 2025. Está entre os cinco tópicos de maior incidência do ranking de treze, e é o que mais fica de fora das listas de estudo.

POR QUE CAI

Neste bloco a prova não entrega fórmula nenhuma. Ela mede se você sabe ler número. Ordem de grandeza, conversão de unidade, comparação de frações e raciocínio dedutivo aparecem embrulhados em situação cotidiana, e a conta em si costuma ser curta. O que trava é decidir qual conta fazer.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Notação científica e ordem de grandeza, para comparar sem calculadora
- ☐ Conversão de unidade, dentro do sistema e entre sistemas
- ☐ Formas diferentes de escrever o mesmo número racional
- ☐ Raciocínio dedutivo, quando a resposta sai de organizar as condições
- ☐ Escolha do mínimo ou do máximo em uma lista de opções

AS TRÊS QUE RESOLVEM POTÊNCIA DE 10

$$a \times 10^n, \text{ com } 1 \leq a < 10$$

$$10^m \times 10^n = 10^{(m+n)}$$

$$10^m \div 10^n = 10^{(m-n)}$$

NA PRÁTICA

A questão do microscópio, de 2024, parece de biologia e resolve com uma conversão de prefixo e uma divisão. Esse disfarce é a regra deste assunto, não a exceção, e é por isso que ele passa despercebido em lista de estudo.

Notação científica e ordem de grandeza

Notação científica escreve qualquer número como $a \times 10^n$, com a mantissa a entre 1 e 10, e o expoente n inteiro. O diâmetro de uma hemácia, 0,007 mm, vira 7×10^{-3} mm. A distância da Terra ao Sol, 150 000 000 km, vira $1,5 \times 10^8$ km.

A vantagem está na comparação imediata. Entre 3×10^8 e 9×10^6 , o primeiro é maior mesmo tendo mantissa menor, porque o expoente manda.

COMO COMPARAR EM TRÊS SEGUNDOS

01 Compare os expoentes. Quem tem expoente maior é maior

02 Só se os expoentes forem iguais, compare as mantissas

Um exemplo trabalhado

Quantas vezes 6×10^8 é maior que 2×10^5 ? Divida separadamente. As mantissas dão $6 \div 2 = 3$. As potências dão $10^8 \div 10^5 = 10^3$. Logo o resultado é 3×10^3 , ou seja, **3 000 vezes maior**.

Os prefixos que a prova usa

PREFIXO	VALE	EXEMPLO
mili (m)	10^{-3}	1 mm = 10^{-3} m
micro (μ)	10^{-6}	1 μ m = 10^{-6} m = 10^{-3} mm
nano (n)	10^{-9}	1 nm = 10^{-9} m
quilo (k)	10^3	1 km = 10^3 m
mega (M)	10^6	1 MB = 10^6 bytes

GUARDE ISTO

Ordem de grandeza é o expoente, e é ele que decide quem é maior. Antes de multiplicar qualquer coisa, olhe para os expoentes e você já sabe em que casa a resposta cai.

O mesmo número, escrito de várias maneiras

Um número racional aceita várias representações, e a prova gosta de colocar duas formas do mesmo valor lado a lado para ver se você percebe.

FORMA	EXEMPLO	VALE
fração	$9/2$	4,5
número misto	$4\frac{1}{2}$	4,5
decimal	4,5	4,5
porcentagem	450%	4,5
potência	$4^{1/2}$	2

UM DETALHE TIPOGRÁFICO QUE VALE A QUESTÃO

$4\frac{1}{2}$ e $4^{1/2}$ são coisas diferentes. O primeiro é quatro inteiros e meio, ou seja, 4,5. O segundo é quatro elevado a um meio, ou seja, a raiz quadrada de 4, que dá 2. A diferença mora na altura do símbolo, e a prova já cobrou exatamente isso.

Converter sem errar

Para transformar fração em decimal, divida. Para transformar número misto em fração imprópria, multiplique a parte inteira pelo denominador e some o numerador, mantendo o denominador. Em $4\frac{1}{2}$, isso dá $(4 \times 2 + 1)/2 = 9/2$.

Um exemplo trabalhado

Quais destes representam a mesma quantidade? $19/2$, $9\frac{1}{2}$, $4/5$, $5/20$, $9\frac{1}{2}$. Passe todos para decimal. $19/2 = 9,5$. $9\frac{1}{2} = 9,5$, porque o expoente $\frac{1}{2}$ é raiz quadrada. $4/5 = 0,8$. $5/20 = 0,25$. $9\frac{1}{2} = 9,5$. Só $19/2$ e $9\frac{1}{2}$ são iguais, e a comparação fica óbvia depois da conversão.

GUARDE ISTO

Quando o enunciado mistura fração, decimal e número misto, converta tudo para decimal antes de comparar. Comparar formas diferentes de cabeça é onde o erro entra.

Conversão de unidade e raciocínio organizado

Conversão errada é o erro mais barato de evitar e um dos mais frequentes. A regra é converter **antes** de montar a conta, nunca no meio dela.

DE	PARA	MULTIPLIQUE POR
hora	minuto	60
dia	minuto	1 440
m	cm	100
m ²	cm ²	10 000
m ³	cm ³	1 000 000

Repare nas linhas de comprimento, área e volume. O fator muda porque muda a quantidade de dimensões, o mesmo raciocínio de escala que aparece no assunto 02.

Raciocínio organizado

Boa parte das questões deste bloco não tem fórmula. Elas dão condições e pedem uma conclusão. Escreva as condições em lista, teste cada alternativa contra a lista inteira e descarte na primeira condição que falhar.

Cinco guichês de um cartório, cada um com um tempo médio de atendimento e um número de pessoas na fila. O tempo de espera é o produto dos dois.

GUICHÊ	TEMPO (MIN)	FILA	ESPERA (MIN)
I	8	7	56
II	4	12	48
III	10	4	40
IV	3	15	45
V	6	6	36

Nem o guichê de menor fila, que é o III, nem o de atendimento mais rápido, que é o IV, vence. Quem decide é o produto dos dois.

ESCOLHER O MÍNIMO QUE SERVE

Boa parte das questões deste bloco pede a **menor opção que ainda cumpre** uma condição, e não a opção mais próxima do valor calculado. O procedimento é sempre o mesmo. Calcule a exigência exata, arredonde **para cima** se o enunciado usar palavras como garantir, bastar, permitir ou no mínimo, e escolha o primeiro item da lista que cobre esse valor. Se a conta der 16,15 e a lista oferecer 14 e 17, a resposta é 17, ainda que 14 esteja mais perto.

GUARDE ISTO

Em questão de raciocínio, escreva a lista antes de testar. Quem testa alternativa de cabeça esquece uma condição no meio do caminho e marca a errada com convicção.

Quatro atalhos para o bloco sem fórmula

01 Expoente primeiro, mantissa depois

Em qualquer comparação com potência de 10, olhe só para os expoentes. Se um é maior, a disputa acabou. Você resolve boa parte das questões de ordem de grandeza sem escrever um número sequer.

02 Converta tudo antes, nunca durante

Escolha uma unidade, passe todos os valores para ela e só então monte a conta. Converter no meio é onde metade dos erros de unidade nasce.

03 Decimal é a língua comum

Diante de fração, número misto, porcentagem e decimal na mesma questão, passe todos para decimal. Comparar formas diferentes de cabeça parece rápido e custa caro.

04 Monte a coluna que a pergunta pede

Quando o enunciado dá uma tabela e pergunta qual opção é a melhor, quase sempre falta uma coluna, que é a do critério. Calcule essa coluna para todas as linhas antes de escolher. A resposta costuma não ser a linha que parece óbvia.

Antes de calcular, estime a casa da resposta.

Arredonde para potência de 10 e veja em que ordem de grandeza o resultado cai. Alternativa fora dessa casa sai da disputa sem conta nenhuma.

ENEM 2024

O tamanho mínimo que a visão humana é capaz de visualizar sem o uso de equipamento auxiliar é equivalente a 100 micrômetros ($1 \text{ micrômetro} = 10^{-3} \text{ milímetros}$). Uma estudante pretende visualizar e analisar hemácias do sangue humano, que medem 0,007 mm de diâmetro. Ela adquiriu um microscópio óptico que tem uma lente ocular que amplia em 10 vezes a imagem do objeto em observação, e um conjunto de lentes objetivas com estas capacidades de ampliação: lente I, 2 vezes; lente II, 10 vezes; lente III, 15 vezes; lente IV, 1,1 vez; lente V, 1,4 vez.

O funcionamento desse microscópio permite o uso da lente ocular sozinha ou a combinação dela com uma de suas lentes objetivas, proporcionando, nesse caso, um aumento de sua capacidade de ampliação final, que é dada pelo produto entre as capacidades de ampliação da ocular e da objetiva.

Essa estudante pretende selecionar a lente objetiva de menor capacidade de ampliação que permita, na combinação com a ocular, visualizar hemácias do sangue humano. A lente objetiva a ser selecionada pela estudante é a

- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) IV.
- (E) V.

Como resolver

- 01** Coloque tudo na mesma unidade. O limite da visão é 100 micrômetros, e 1 micrômetro vale 10^{-3} mm , então o limite é **0,1 mm**.
- 02** Escreva o que precisa acontecer. A hemácia mede 0,007 mm e, ampliada, precisa chegar a pelo menos 0,1 mm. Logo $0,007 \times \text{ampliação} \geq 0,1$.
- 03** Isole a ampliação total. $0,1 \div 0,007 \approx \textbf{14,3 vezes}$.
- 04** Separe a parte da ocular, que vale 10. Então $10 \times \text{objetiva} \geq 14,3$, o que dá $\text{objetiva} \geq \textbf{1,43}$.
- 05** Escolha a menor da lista que satisfaz. A lente V, de 1,4, fica abaixo de 1,43 e não serve, por pouco. A menor que serve é a de 2 vezes.

AResposta correta · **lente I**, de 2 vezes

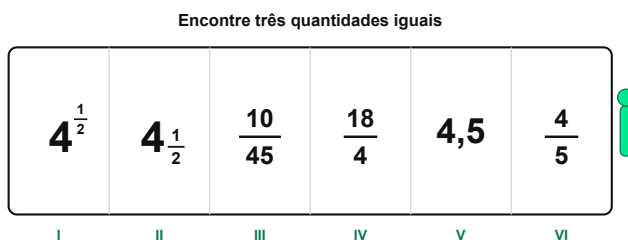
O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Trabalhe direto em micrômetro. A hemácia mede 7 μm e o limite é 100 μm , então a razão é $100/7 \approx 14,3$. Dividindo pelos 10 vezes da ocular, sobra 1,43, sem nenhuma vírgula no caminho. A alternativa E existe para quem arredondar 14,3 para 14 e concluir que 1,4 basta.

ENEM 2024

Uma professora de matemática utiliza em suas aulas uma "máquina caça-números" para verificar os conhecimentos de seus estudantes sobre representações de números racionais. Essa máquina tem um visor dividido em seis compartimentos e, na lateral, uma alavanca. Cada estudante puxa a alavanca e espera que os compartimentos parem de girar. A partir daí, precisa responder para a professora em quais posições se encontram os números que representam a mesma quantidade.

Um estudante puxou a alavanca, aguardou que os compartimentos parassem de girar e observou os números apresentados no visor. A configuração da máquina naquele instante está apresentada na imagem.



Esse estudante respondeu corretamente à pergunta da professora. As posições indicadas pelo estudante foram

- (A) I, II e IV.
- (B) II, IV e V.
- (C) II, III e V.
- (D) III, V e VI.
- (E) III, IV e VI.

Como resolver

- 01** Converta tudo para decimal, que é a única forma de comparar representações diferentes sem tropeçar.
- 02** Posição I, $4^{\frac{1}{2}}$. O expoente $\frac{1}{2}$ significa raiz quadrada, então vale **2**.
- 03** Posição II, $4\frac{1}{2}$. Aqui não há expoente, é número misto, então vale **4,5**.
- 04** Posições III e VI, $10/45 \approx 0,22$ e $4/5 = 0,8$.
- 05** Posições IV e V, $18/4 = 4,5$ e $4,5 = 4,5$.
- 06** Junte os iguais. O valor 4,5 aparece nas posições II, IV e V.

BResposta correta · posições **II, IV e V**

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

A questão inteira gira em uma distinção só, entre $4^{\frac{1}{2}}$ e $4\frac{1}{2}$. Quem lê as duas como 4,5 encontra quatro valores iguais e trava, porque a pergunta pede três. Esse travamento é o aviso de que uma das duas não é 4,5, e a que não é vale 2.

As quatro confusões que custam ponto

Multiplicar potências em vez de somar expoentes

Calcular $10^3 \times 10^5$ como se fosse 10^{15} , ou tentar expandir os dois números e multiplicar à mão. O primeiro dá resposta errada, o segundo gasta o tempo que a questão não tem. Some os expoentes na multiplicação e subtraia na divisão. Em questão de comparação entre grandezas muito diferentes, a banca costuma oferecer o resultado com o expoente somado errado logo ao lado do certo.

Converter só metade das grandezas

Passar o tempo de hora para minuto e esquecer de passar a distância de quilômetro para metro, na mesma questão de velocidade. A conta fica coerente na aparência e errada por um fator de mil. Converta tudo antes de montar. O sintoma é a resposta cair exatamente mil vezes acima ou abaixo de uma das alternativas, e essa alternativa está lá de propósito.

Ler expoente como número misto

Confundir $4\frac{1}{2}$ com $4\frac{1}{2}$. O primeiro vale 2, o segundo vale 4,5. A diferença é a altura do símbolo na página, e a prova já usou exatamente essa confusão como eixo de uma questão inteira. O aviso de que você caiu nela é encontrar mais valores iguais do que a pergunta pede.

Arredondar antes da comparação final

Transformar 14,3 em 14 e concluir que uma opção de 1,4 basta, quando a exigência real era 1,43. Arredonde só no fim, e quando a pergunta usar palavras como permitir, bastar ou no mínimo, arredonde para cima. Quando a lista de opções tem um valor logo abaixo do necessário, como 1,4 contra 1,43, ele é a armadilha principal da questão.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

- ☐ Passei todos os valores para a mesma unidade antes de montar a conta?
- ☐ Comparei os expoentes antes de olhar para as mantissas?
- ☐ A pergunta usa garantir, bastar ou no mínimo? Se usa, arredondei para cima?
- ☐ Convertei fração, decimal e número misto para a mesma forma antes de comparar?

Agora é com você

01**ENEM 2025**

No atletismo, um grande desafio da prova de 100 metros rasos é a sua conclusão num tempo abaixo da marca de referência dos 10,00 segundos. Vários atletas já alcançaram esse feito. Em 2009, o jamaicano Usain Bolt estabeleceu o recorde mundial masculino dessa prova, com o tempo de 9,58 segundos.

Qual é a diferença, em segundo, entre a marca de referência e a marca estabelecida por Usain Bolt em 2009?

- (A) 0,02
- (B) 0,42
- (C) 0,52
- (D) 1,02
- (E) 1,42

02**ENEM 2023**

Um supermercado conta com cinco caixas disponíveis para pagamento. Foram instaladas telas que apresentam o tempo médio gasto por cada caixa para iniciar e finalizar o atendimento de cada cliente, e o número de pessoas presentes na fila de cada caixa em tempo real. Um cliente, na hora de passar sua compra, sabendo que cada um dos cinco caixas iniciará um novo atendimento naquele momento, pretende gastar o menor tempo possível de espera na fila. Ele observa que as telas apresentavam as informações a seguir. Caixa I, atendimento 12 minutos, 5 pessoas na fila. Caixa II, atendimento 6 minutos, 9 pessoas na fila. Caixa III, atendimento 5 minutos, 6 pessoas na fila. Caixa IV, atendimento 15 minutos, 2 pessoas na fila. Caixa V, atendimento 9 minutos, 3 pessoas na fila.

Para alcançar seu objetivo, o cliente deverá escolher o caixa

- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) IV.
- (E) V.

Agora é com você

03

ENEM 2025

Em um país, a primeira etapa para obtenção da carteira de motorista é a contratação de três produtos: um pacote com 20 aulas teóricas, um pacote com 10 aulas práticas e o aluguel do veículo para realização das aulas práticas. Uma pessoa que pretende obter a carteira de motorista pesquisou o valor do aluguel do veículo e os valores de cada aula teórica e de cada aula prática em três autoescolas. O quadro apresenta esses valores.

AUTOESCOLA	AULA TEÓRICA (R\$)	AULA PRÁTICA (R\$)	ALUGUEL (R\$)
I	10	80	400
II	30	50	200
III	20	40	400

Ela contratará os três produtos numa mesma autoescola de modo que o custo total nessa primeira etapa seja o menor possível. A autoescola que será contratada é a

- (A) I, com o custo total de R\$ 1 400,00.
- (B) II, com o custo total de R\$ 280,00.
- (C) II, com o custo total de R\$ 1 300,00.
- (D) III, com o custo total de R\$ 460,00.
- (E) III, com o custo total de R\$ 1 200,00.

04

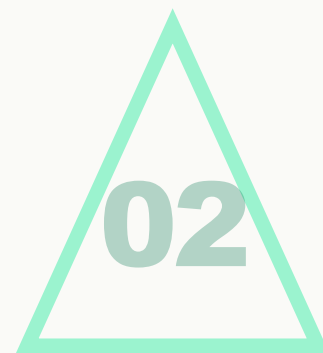
ENEM 2023

O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R\$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos.

Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos?

- (A) 4,68
- (B) 6,30
- (C) 9,30
- (D) 10,50
- (E) 10,65

RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS



Como comparar duas grandezas e, a partir dessa comparação, descobrir uma terceira que o enunciado não deu.

17,6%

das questões de Matemática do ENEM nas últimas 11 edições.

É o primeiro lugar isolado, e o único que não muda de posição em nenhum cenário.

POR QUE CAI

É o assunto que mais cai em Matemática no ENEM, e com folga. Também é o que mais aparece disfarçado dentro dos outros. Quando uma questão de geometria fala em maquete, é escala. Quando uma de estatística compara duas amostras de tamanhos diferentes, é proporção. Quando o enunciado traz velocidade, vazão ou densidade, é razão entre duas grandezas.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Decidir se a relação é direta ou inversa, antes de montar qualquer conta
- ☐ Regra de três simples
- ☐ Regra de três composta
- ☐ Escala, e o que muda quando o problema pede área ou volume
- ☐ Grandezas compostas, que são razões disfarçadas

AS TRÊS QUE RESOLVEM O ASSUNTO

$$a/b = c/d \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\text{inversa} \rightarrow a \cdot b = c \cdot d$$

$$\text{escala} \rightarrow k, k^2, k^3$$

NA PRÁTICA

Aprender a reconhecer proporção rende em toda a prova, não só nas questões deste bloco. Metade do que parece geometria ou estatística é proporção usando outro vocabulário.

Razão, proporção, e a pergunta que decide tudo

Razão é a comparação entre duas grandezas por divisão. Se um carro roda 210 km com 16 litros, a razão entre distância e combustível é $210/16$, ou seja, 13,1 km por litro. Note que a razão tem unidade, e a unidade é o que diz o que ela significa.

Proporção é a igualdade entre duas razões. Escrever $a/b = c/d$ é afirmar que a comparação entre **a** e **b** é a mesma comparação entre **c** e **d**. Aqui **a** e **c** são valores da primeira grandeza, **b** e **d** são os valores correspondentes da segunda.

A PERGUNTA DA SETA

Se eu aumentar a primeira grandeza, a segunda aumenta ou diminui?

Se aumenta junto, as grandezas são **diretamente proporcionais**. Mais horas de trabalho, mais peças produzidas. Se uma sobe e a outra desce, elas são **inversamente proporcionais**. Mais operários na obra, menos dias para terminar.

Duas situações que parecem iguais

Uma torneira enche um tanque em 6 horas. Duas torneiras iguais enchem o mesmo tanque em quantas horas? O número de torneiras aumentou e o tempo diminuiu, então a relação é **inversa**, e com 2 torneiras o tempo cai para 3 horas.

Agora compare. Uma torneira despeja 40 litros por minuto. Quanto ela despeja em 2 minutos? O tempo aumentou e o volume aumentou junto, então a relação é **direta**, e a resposta é 80 litros.

As duas situações falam de torneira e de tempo. O que muda é o que está sendo comparado com o quê. Por isso a pergunta da seta vem antes da conta, e não depois.

GUARDE ISTO

Nomear a relação como direta ou inversa é o passo que decide a conta inteira. Errar aqui gera a resposta invertida, e ela costuma estar entre as alternativas esperando.

Regra de três, da simples à composta

A regra de três é o método de achar o quarto valor de uma proporção quando três já são conhecidos. Monte as grandezas em colunas, com cada linha representando uma situação, e marque a incógnita.

Direta, multiplique em cruz

Se 3 litros de tinta pintam 24 m² de parede, quantos m² pintam 5 litros? Como mais tinta pinta mais parede, a relação é direta, então $3/5 = 24/x$, o que dá $3x = 120$ e **$x = 40$ m²**.

Inversa, multiplique na horizontal

Se 4 impressoras levam 9 horas para um serviço, quantas horas levam 6 impressoras iguais? Mais impressoras significa menos horas, então a conta é $4 \cdot 9 = 6 \cdot x$, o que dá **$x = 6$ horas**.

DIRETA litros 3 → área 24 · litros 5 → área x · $3x = 5 \cdot 24$
INVERSA impressoras 4 → horas 9 · impressoras 6 → horas x · $4 \cdot 9 = 6x$

Na direta os produtos cruzam. Na inversa eles ficam na mesma linha.

Composta, use a razão unitária

Quando três ou mais grandezas entram na mesma questão, o erro clássico é aplicar a mesma regra a todas as colunas de uma vez. Em vez de decidir a direção de cada coluna, descubra quanto vale **uma unidade** e reconstrua a resposta a partir dela.

Se 4 costureiras trabalhando 5 horas por dia produzem 200 peças, quantas produzem 6 costureiras em 8 horas? São $4 \times 5 = 20$ horas de costureira para 200 peças, então cada hora rende $200/20 = 10$ peças. Na situação nova são $6 \times 8 = 48$ horas, logo **$48 \times 10 = 480$ peças**.

TRÊS SITUAÇÕES QUE A PROVA REPETE

CONTEXTO	RELAÇÃO	POR QUÊ
mais operários, menos dias	inversa	o trabalho total é fixo
mais material, mais área coberta	direta	o rendimento por unidade é fixo
mais velocidade, menos tempo	inversa	a distância é fixa

GUARDE ISTO

Em regra de três composta, a razão unitária dispensa decidir a direção de cada coluna. Descubra quanto rende uma unidade e multiplique pelo total de unidades da nova situação.

Escala, e as grandezas que já são razões

Escala é a razão entre a medida no desenho e a medida real. Uma escala de 1 : 200 quer dizer que 1 unidade no papel corresponde a 200 unidades no objeto real, sempre na mesma unidade dos dois lados. Até aqui, nada além de proporção direta. O que derruba é o que acontece quando o problema não pede comprimento.

CONTE AS DIMENSÕES E VOCÊ TEM O EXPOENTE

O QUE SE COMPARA	RAZÃO	POR QUÊ
comprimento, largura, altura, raio	k	uma dimensão
área, superfície	k ²	duas dimensões
volume, capacidade	k ³	três dimensões

O motivo é direto. Área é comprimento vezes comprimento, então cada um dos dois fatores é multiplicado por k, e o resultado sai multiplicado por k · k. Volume tem três fatores, então sai multiplicado por k · k · k.

Uma planta em escala 1 : 50 mostra um cômodo com 8 cm² de área. A razão de área é 1 para 50² = 2 500, então a área real é 8 × 2 500 = 20 000 cm², ou seja, 2 m². Quem multiplicar por 50 encontra 400 cm², um resultado cinquenta vezes menor.

Grandezas que já são razões

GRANDEZA	É A RAZÃO ENTRE	UNIDADE TÍPICA
velocidade	distância e tempo	km/h, m/s
vazão	volume e tempo	L/min, m ³ /s
densidade demográfica	habitantes e área	hab/km ²

Quando o enunciado diz que a vazão é constante, ele está dizendo que volume e tempo são diretamente proporcionais. Quando pede a densidade de duas regiões, ele está pedindo a razão entre duas razões, e basta dividir uma pela outra.

GUARDE ISTO

Antes de montar a conta, escreva a unidade da grandeza que a questão pede. A unidade mostra a divisão que precisa ser feita, porque litro por minuto já diz que é volume dividido por tempo.

Quatro coisas que resolvem a maioria das questões

01 A pergunta da seta

Antes de escrever qualquer número, olhe para as duas grandezas e responda em voz alta se, aumentando uma, a outra sobe ou desce. Escreva a resposta ao lado da coluna. Esse rabisco de dois segundos é o que separa a proporção certa da invertida, e a invertida quase sempre está entre as alternativas.

02 Uma unidade de cada vez

Em regra de três composta, esqueça as setas e vá pela razão unitária. Você troca três decisões de direção por duas contas simples, e nenhuma delas pode ser invertida.

03 Conte as dimensões

Comprimento tem uma dimensão e usa k . Área tem duas e usa k^2 . Volume tem três e usa k^3 . Antes de aplicar a escala, pergunte quantas dimensões tem o que a questão pediu, e o expoente aparece sozinho.

04 Estime a ordem de grandeza antes

Arredonde os números e faça a conta de cabeça. Se a resposta estimada fica perto de 400 e três alternativas estão na casa dos 4 ou dos 40, elas saem da disputa antes da conta exata.

Conte as dimensões e você tem o expoente do k .

A tabela da página anterior traz os três casos. O que precisa ficar na cabeça é o gesto de contar as dimensões antes de escolher o expoente.

ENEM 2025

Uma fábrica de tijolos ecológicos com 3 funcionários, cada um trabalhando 6 horas diárias, produz 720 unidades por dia. Para atender ao crescimento da demanda por esse tipo de tijolo, essa fábrica passou a ter 5 funcionários, cada um trabalhando 9 horas por dia, aumentando, assim, sua capacidade de produção. Todos os funcionários produzem igual quantidade de tijolos a cada hora, independentemente de trabalharem 6 ou 9 horas diárias.

O número de tijolos fabricados diariamente após o aumento da capacidade de produção é

- (A) 800.
- (B) 1 080.
- (C) 1 200.
- (D) 1 800.
- (E) 2 520.

Como resolver

- 01** Identifique as grandezas. São três, o número de funcionários, as horas diárias de cada um e a quantidade de tijolos. Como há mais de duas, a questão é de **regra de três composta**.
- 02** Vá pela razão unitária, para não decidir direção nenhuma. Na situação original, o trabalho total é $3 \times 6 = 18$ **horas de funcionário**.
- 03** Descubra quanto rende uma hora de funcionário. Essas 18 horas produzem 720 tijolos, então cada hora rende $720 \div 18 = 40$ **tijolos**.
- 04** Monte a situação nova. Agora são $5 \times 9 = 45$ **horas de funcionário**.
- 05** Reconstrua a produção. São $45 \times 40 = 1\ 800$ **tijolos por dia**.

DResposta correta · **1 800 tijolos** por dia

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Os funcionários passaram de 3 para 5, o que multiplica por $5/3$. As horas passaram de 6 para 9, o que multiplica por $9/6$. As duas são diretamente proporcionais à produção, então $720 \times (5/3) \times (9/6) = 720 \times 2,5 = 1\ 800$. A alternativa B é o que sai de aplicar só o aumento de horas, e a C só o de funcionários.

ENEM 2024

O arquiteto Renzo Piano exibiu a maquete da nova sede do Museu Whitney de Arte Americana, um prédio assimétrico que tem um vão aberto para a galeria principal, cuja medida da área é $1\,672\text{ m}^2$. Considere que a escala da maquete exibida é $1 : 200$.

Época, n. 682, jun. 2011 (adaptado).

A medida da área do vão aberto nessa maquete, em centímetro quadrado, é

- (A) 4,18.
- (B) 8,36.
- (C) 41,80.
- (D) 83,60.
- (E) 418,00.

Como resolver

- 01** Veja o que a questão pede. Ela pede **área**, não comprimento. Esse é o ponto que decide a questão inteira, então marque isso antes de qualquer conta.
- 02** Aplique o expoente certo. A escala de comprimento é $1 : 200$, e área tem duas dimensões, então a escala de área é $1 : 200^2$, ou seja, $1 : 40\,000$.
- 03** Reduza a área real. Na maquete ela vale $1\,672 \div 40\,000 = 0,0418\text{ m}^2$.
- 04** Converta para centímetro quadrado. Um metro quadrado tem $100 \times 100 = 10\,000\text{ cm}^2$, logo $0,0418 \times 10\,000 = 418\text{ cm}^2$.

EResposta correta · **418,00 cm²**

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Converta primeiro e divida depois. A área real em centímetro quadrado é $1\,672 \times 10\,000 = 16\,720\,000\text{ cm}^2$, e dividindo por $40\,000$ sobra 418 cm^2 . Repare no desenho das alternativas. Quem dividir por 200 em vez de $40\,000$ encontra $83\,600$, e o número $83,60$ está na alternativa D com a vírgula deslocada.

As quatro confusões que custam ponto

Inverter a seta

Montar a proporção como direta quando ela é inversa, ou o contrário. Acontece porque o aluno pula direto para a conta, e a conta funciona nos dois sentidos, ela só devolve o número errado. É o erro mais comum do assunto que mais cai na prova. Escreva "sobe" ou "desce" ao lado da coluna antes de multiplicar e ele desaparece.

Tratar toda coluna da composta como direta

Numa questão com três ou mais grandezas, aplicar a multiplicação em cruz em todas as colunas de uma vez. Basta uma das grandezas ser inversa para o resultado sair errado, e nada no formato da conta avisa. A razão unitária resolve, porque ela não tem direção para errar.

Escalar área com o k do comprimento

Multiplicar ou dividir a área pela escala linear, esquecendo o quadrado. Numa escala 1 : 200 o erro é de fator 200, e ainda assim costuma bater com uma das alternativas, porque a banca coloca esse resultado lá de propósito. Em volume o efeito é pior, porque o fator esquecido é ao cubo.

Arredondar para baixo quando o enunciado pede que baste

Quando a conta dá 16,15 e a pergunta é qual cilindro **garante** o abastecimento da semana, o de 14 não basta. A resposta é o primeiro valor da lista que cobre os 16,15. O mesmo vale para embalagem fechada, porque ninguém compra 57,5 pacotes de papel.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

- ☐ Escrevi "sobe" ou "desce" ao lado de cada coluna antes de multiplicar?
- ☐ Em composta, usei a razão unitária em vez de decidir três direções?
- ☐ A pergunta é sobre área ou volume? Se é, usei k^2 ou k^3 ?
- ☐ A planta e o objeto real estão na mesma unidade antes de aplicar a escala?

Agora é com você

01**ENEM 2025**

Uma pessoa pretende instalar um kit de gás natural veicular (GNV) em seu carro. Na loja que escolheu para realizar a compra e instalação desse kit, havia cinco modelos de cilindro para armazenamento do gás, cujas capacidades, em metro cúbico, eram, respectivamente: 10, 14, 17, 21 e 25. O preço do cilindro é proporcional à sua capacidade. Esse carro rodará 30 km diariamente, 7 dias por semana, e o consumo do GNV é de 1 m^3 a cada 13 km rodados. A pessoa escolherá o modelo de cilindro de menor preço e que garanta apenas um abastecimento semanal.

Nessas condições, qual será a capacidade, em metro cúbico, do cilindro escolhido por essa pessoa?

- (A) 10
- (B) 14
- (C) 17
- (D) 21
- (E) 25

02**ENEM 2024**

Uma piscina tem capacidade de 2 500 000 litros. Seu sistema de abastecimento foi regulado para ter uma vazão constante de 6 000 litros de água por minuto. O mesmo sistema foi instalado em uma segunda piscina, com capacidade de 2 750 000 litros, e regulado para ter uma vazão, também constante, capaz de enchê-la em um tempo 20% maior que o gasto para encher a primeira piscina.

A vazão do sistema de abastecimento da segunda piscina, em litro por minuto, é

- (A) 8 250.
- (B) 7 920.
- (C) 6 545.
- (D) 5 500.
- (E) 5 280.

Agora é com você**03****ENEM 2022**

Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.

A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é

- (A) 0,125.
- (B) 0,200.
- (C) 4,800.
- (D) 6,000.
- (E) 12,000.

04**ENEM 2023**

A cada bimestre, a diretora de uma escola compra uma quantidade de folhas de papel ofício proporcional ao número de alunos matriculados. No bimestre passado, ela comprou 6 000 folhas para serem utilizadas pelos 1 200 alunos matriculados. Neste bimestre, alguns alunos cancelaram suas matrículas e a escola tem, agora, 1 150 alunos. A diretora só pode gastar R\$ 220,00 nessa compra, e sabe que o fornecedor da escola vende as folhas de papel ofício em embalagens de 100 unidades a R\$ 4,00 a embalagem. Assim, será preciso convencer o fornecedor a dar um desconto à escola, de modo que seja possível comprar a quantidade total de papel ofício necessária para o bimestre.

O desconto necessário no preço final da compra, em porcentagem, pertence ao intervalo

- (A) (5,0 ; 5,5).
- (B) (8,0 ; 8,5).
- (C) (11,5 ; 12,5).
- (D) (19,5 ; 20,5).
- (E) (3,5 ; 4,0).

PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA



Quanto disso existe, sobre quanto existe no total.

17,4%

das questões, somando os três subtemas, nas últimas 11 edições.
Está entre os blocos que mais cresceram no período recente.

POR QUE CAI

Os três assuntos desta página são o mesmo raciocínio em três roupas. Porcentagem é uma razão de 100. Probabilidade é a razão entre os casos que interessam e todos os casos possíveis. Combinatória é a técnica de contar esses casos quando eles são muitos demais para listar. A prova gosta deste bloco porque ele cabe em contexto de notícia, pesquisa, jogo e sorteio, o que permite enunciado longo antes de uma conta curta.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Porcentagem como fator multiplicativo, principalmente em variações sucessivas
- ☐ Princípio multiplicativo de contagem
- ☐ Diferença entre arranjo e combinação, decidida pelo contexto
- ☐ Probabilidade simples, com casos favoráveis sobre casos possíveis
- ☐ Eventos sucessivos, com e sem reposição

AS TRÊS QUE VOCÊ USA AQUI

aumento de $i\%$ $\rightarrow$ fator $1 + i/100$

$A(n, p) = n! / (n-p)!$

$C(n, p) = n! / [p! (n-p)!]$

NA PRÁTICA

A questão da solução de laboratório, de 2025, muda a concentração em cinco centésimos de ponto percentual e esvazia metade do recipiente. Esse estranhamento é a questão inteira, e ele só aparece para quem trabalha com a parte que não muda.

Porcentagem como fator

Porcentagem é uma razão com denominador 100. Escrever 30% é escrever $30/100$, ou seja, 0,30. Calcular 30% de um valor é multiplicar esse valor por 0,30. O que muda o jogo é parar de pensar em somar ou tirar por cento e passar a pensar em **fator multiplicativo**.

O FATOR RESOLVE QUASE TUDO

SITUAÇÃO	FATOR	SITUAÇÃO	FATOR
aumento de 20%	1,20	desconto de 20%	0,80
aumento de 5%	1,05	desconto de 3%	0,97

Para aplicar duas variações em sequência, **multiplique os fatores**. Um produto que sofre aumento de 10% e depois desconto de 10% não volta ao preço original. O fator final é $1,10 \times 0,90 = 0,99$, ou seja, o preço cai 1%. Somar +10% e -10% para chegar a zero é o erro mais clássico do subtema, e ele acontece porque o desconto incide sobre um valor já aumentado.

Porcentagem de porcentagem

Quando o enunciado diz que um custo é uma porcentagem de outro, ele está dando uma razão entre os dois. Se um insumo reaproveitado custa R\$ 80,00 por unidade e isso equivale a 4% do custo do insumo novo, então o novo custa $80 \div 0,04 = \text{R\$ } 2\,000,00$. Dividir por 0,04 é o mesmo que multiplicar por 25.

Um exemplo trabalhado

Um produto de R\$ 200,00 sofre três variações em sequência. Acompanhe pelo fator, e não pelo percentual acumulado.

ETAPA	FATOR	PREÇO
aumento de 25%	1,25	R\$ 250,00
desconto de 20%	0,80	R\$ 200,00
aumento de 10%	1,10	R\$ 220,00

O fator acumulado é $1,25 \times 0,80 \times 1,10 = 1,10$, ou seja, uma alta de 10% no total. Somar os percentuais daria +15%, e a diferença não é pequena.

GUARDE ISTO

Variação percentual sucessiva multiplica fator, nunca soma percentual. Escreva cada etapa como fator e a questão vira uma multiplicação.

Contar sem listar

O princípio multiplicativo diz que, se uma escolha tem etapas independentes, o total de possibilidades é o produto do número de opções de cada etapa. Uma senha de três letras distintas em um alfabeto de 26 tem $26 \times 25 \times 24$ possibilidades, porque cada letra usada sai da lista para a próxima.

ARRANJO OU COMBINAÇÃO, DECIDIDO POR UMA PERGUNTA

Trocar a ordem dos elementos escolhidos gera um resultado diferente?

Se **sim**, é arranjo. Senha, pódio, cargos com nomes distintos, sequência de letras. Se **não**, é combinação. Comissão sem cargos, grupo de pessoas, conjunto de sabores. Escolher presidente e vice entre 10 pessoas é arranjo, porque trocar quem é presidente muda o resultado. Escolher dois representantes sem distinção é combinação.

SITUAÇÃO	ORDEM IMPORTA?	FERRAMENTA
senha de 4 caracteres distintos	sim	arranjo
pódio com ouro, prata e bronze	sim	arranjo
comissão de 3 pessoas sem cargo	não	combinação
escolher 2 sabores de sorvete	não	combinação
sequência de 3 letras numa placa	sim	arranjo

Quando a contagem se divide em casos

Muita questão pede "pelo menos" alguma coisa. Nesses casos, separe em situações que não se sobrepõem, conte cada uma e **some** no fim.

De 5 professores e 4 monitores, formar uma equipe de 4 pessoas com pelo menos 2 professores. Os casos são 2 com 2, 3 com 1, ou 4 com nenhum. Ninguém recebe cargo, então cada bloco é combinação, e a expressão fica $C(5,2) \cdot C(4,2) + C(5,3) \cdot C(4,1) + C(5,4) \cdot C(4,0)$.

GUARDE ISTO

Dentro de um caso, multiplique. Entre casos alternativos, some. Confundir essas duas operações é o erro estrutural da combinatória.

Probabilidade, do caso simples ao sucessivo

Probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, desde que todos os casos sejam igualmente prováveis. Ela vive entre 0 e 1, e pode ser lida como fração, decimal ou porcentagem.

Eventos sucessivos

Quando dois eventos acontecem em sequência e ambos precisam ocorrer, multiplique as probabilidades. O cuidado está em recalculando o segundo total.

SITUAÇÃO	O QUE MUDA
com reposição	o total de casos possíveis permanece o mesmo
sem reposição	o total diminui a cada retirada

"E" MULTIPLICA, "OU" SOMA

Se o enunciado pede que dois eventos ocorram juntos, multiplique. Se pede que ocorra um **ou** outro, e eles não podem acontecer ao mesmo tempo, some.

Uma cancela de estacionamento fica fechada 20 segundos a cada 50, então a probabilidade de encontrá-la fechada é $20/50 = 0,4$. Em duas cancelas independentes, a de encontrar as duas fechadas é $0,4 \times 0,4 = 0,16$. Para que essa probabilidade caia para 0,09, cada cancela precisa de p com $p^2 = 0,09$, ou seja, $p = 0,3$, o que leva o tempo fechado a 15 segundos.

O complementar economiza conta

Calcular a probabilidade de "pelo menos um" costuma ser trabalhoso pelo caminho direto. O atalho é calcular a probabilidade de **nenhum** e subtrair de 1.

GUARDE ISTO

Em evento sucessivo, reescreva o total de casos possíveis a cada etapa antes de multiplicar. Esquecer que o total mudou é o erro que a prova mais espera.

Quatro atalhos de contagem e chance

01 Tudo vira fator

Aumento, desconto, sucessão de variações, tudo. Escreva 1,20, depois 0,85, depois 1,05, e multiplique. Você nunca mais soma percentual por engano, e questões de três etapas viram uma linha.

02 A pergunta da ordem

Antes de escolher entre arranjo e combinação, pergunte se trocar a ordem muda o resultado. Dois segundos de pergunta economizam a questão inteira.

03 Dentro do caso multiplica, entre casos soma

Sempre que aparecer "pelo menos", separe em casos, resolva cada um com multiplicação e some no fim. A expressão fica longa, e é para ficar mesmo.

04 Probabilidade nunca sai de zero a um

Antes de conferir a conta, olhe a alternativa. Probabilidade negativa ou maior que 1 está errada sem precisar de verificação, e porcentagem de parte sobre total também não passa de 100%. Isso costuma eliminar uma ou duas opções de graça.

05 Vá pelo complementar

Se a pergunta pede "pelo menos um", calcule a chance de nenhum e faça 1 menos isso. Costuma transformar cinco contas em uma.

A ordem importa? Arranjo. A ordem não importa? Combinação.

É a única pergunta que separa as duas fórmulas, e ela vem antes de qualquer fatorial.

ENEM 2025

Em um laboratório, um recipiente contém 10 litros de uma solução composta apenas pelas substâncias S_1 e S_2 . Dessa solução, 99,95% é de S_1 . Uma quantidade de S_1 será retirada dessa solução, mantendo a quantidade inicial de S_2 , de modo que 99,90% da nova solução seja de S_1 .

Qual é a quantidade de S_1 , em litro, que será retirada?

- (A) 0,0050
- (B) 0,0100
- (C) 0,5000
- (D) 4,9775
- (E) 5,0000

Como resolver

- 01** Encontre o que não muda. A quantidade de S_2 permanece a mesma do começo ao fim. Trabalhar com ela, e não com S_1 , é o que torna a questão simples.
- 02** Calcule S_2 no início. Se 99,95% é S_1 , então S_2 é 0,05% de 10 litros, ou seja, $0,0005 \times 10 = \mathbf{0,005 \text{ litro}}$.
- 03** Escreva o que S_2 representa no fim. Na nova solução, S_1 é 99,90%, então S_2 passa a ser 0,10% do novo volume V , logo $0,001 \times V = 0,005$.
- 04** Ache o novo volume. $V = 0,005 \div 0,001 = \mathbf{5 \text{ litros}}$.
- 05** Calcule o que saiu. O recipiente tinha 10 litros e ficou com 5, então foram retirados **5 litros** de S_1 .

EResposta correta · **5,0000 litros** retirados

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

A fração de S_2 passou de 0,05% para 0,10%, ou seja, **dobrou**. Como a quantidade de S_2 não mudou, o volume total precisa ter caído pela metade, de 10 para 5 litros. As alternativas A e B existem para quem trabalhar com a diferença percentual em vez da quantidade de S_2 .

ENEM 2023

Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres: algarismos de 0 a 9, 26 letras minúsculas do alfabeto, 26 letras maiúsculas do alfabeto e 6 caracteres especiais. Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário. O tipo I é formado por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos. O tipo II é formado por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial. O tipo III é formado por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1 , p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III. O tipo de senha com a menor probabilidade de ser descoberta é o

- (A) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
- (B) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
- (C) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
- (D) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
- (E) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

Como resolver

- 01** Entenda o que torna a senha segura. A probabilidade de acertar é 1 dividido pelo número de senhas possíveis, então **mais senhas possíveis significa menor probabilidade**.
- 02** Conte os caracteres permitidos. São $10 + 26 + 26 + 6 = 68$, dos quais 52 são letras.
- 03** Tipo I. Quatro distintos quaisquer, com ordem, dá $68 \times 67 \times 66 \times 65 = 19\ 545\ 240$.
- 04** Tipo II. $52 \times 51 \times 50$ para as letras, 10 para o algarismo e 6 para o especial, o que dá **7 956 000**.
- 05** Tipo III. 52×51 para as letras, 10×9 para os algarismos e 6×5 para os especiais, o que dá **7 160 400**.
- 06** Compare. O tipo I tem o maior número de senhas, logo a menor probabilidade, e como probabilidade é o inverso da contagem, $p_1 < p_2 < p_3$.

AResposta correta · **tipo I**, pois $p_1 < p_2 < p_3$

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Não é preciso terminar as três multiplicações. O tipo I usa os 68 caracteres em todas as posições, enquanto os outros amarram cada posição a um subconjunto pequeno, e só os 6 especiais já limitam muito. As alternativas B e E oferecem a resposta certa e a errada pelo motivo errado.

As quatro confusões que custam ponto

Somar percentuais sucessivos

Tratar aumento e desconto de mesmo percentual como se um anulasse o outro. O sintoma é a resposta bater exatamente com o valor inicial, e essa alternativa está sempre entre as cinco. Escreva os fatores e multiplique.

Confundir arranjo com combinação

Usar a fórmula da combinação em uma situação em que a ordem importa, ou o contrário. O sintoma é o resultado sair dividido ou multiplicado por um fatorial em relação ao esperado. Pergunte se trocar a ordem muda o resultado antes de escolher a fórmula.

Manter o total em evento sem reposição

Calcular a segunda retirada com o mesmo denominador da primeira. Se um objeto saiu e não voltou, o total de casos possíveis diminuiu, e a segunda probabilidade muda junto.

Trocar "e" por "ou"

Somar probabilidades quando os dois eventos precisam ocorrer juntos, ou multiplicar quando o enunciado admite um ou outro. Esse é erro de leitura do enunciado, não de conta, e por isso passa despercebido na revisão.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

- ☐ Escrevi cada variação percentual como fator antes de multiplicar?
- ☐ Perguntei se trocar a ordem muda o resultado?
- ☐ O evento tem reposição? Se não tem, recalculei o total a cada etapa?
- ☐ O enunciado pede os dois juntos ou um ou outro?

Agora é com você

01**ENEM 2025**

Uma empresa produziu, em um determinado mês, 110 toneladas de plástico a partir de derivados de petróleo e 80 toneladas a partir de plásticos reciclados. O custo para reciclar uma tonelada de plástico é de R\$ 500,00, que equivale a 5% do custo para produzir a mesma quantidade de plástico a partir de derivados de petróleo. Para o mês seguinte, a meta dessa empresa é produzir a mesma quantidade de plástico que foi produzida nesse mês, mas com redução de, pelo menos, 50% no custo de produção.

Para que no mês seguinte a empresa atinja a meta, a quantidade mínima de toneladas de plástico que devem ser produzidas a partir de reciclagem deverá ser

- (A) 135.
- (B) 140.
- (C) 155.
- (D) 160.
- (E) 175.

02**ENEM 2024**

Para melhorar o fluxo de ônibus em uma avenida que tem dois semáforos, a prefeitura reduzirá o tempo em que cada sinal ficará vermelho, que atualmente é de 15 segundos a cada 60 segundos. Admita que o instante de chegada de um ônibus a cada semáforo é aleatório. O engenheiro de tráfego calculou a probabilidade de um ônibus encontrar cada um deles vermelho, obtendo $15/60$. A partir daí, estabeleceu uma mesma redução no tempo em que cada sinal ficará vermelho, de maneira que a probabilidade de um ônibus encontrar ambos os sinais vermelhos numa mesma viagem seja igual a $4/100$, considerando os eventos independentes.

Para isso, a redução do tempo em que o sinal ficará vermelho, em segundo, estabelecida pelo engenheiro foi de

- (A) 1,35.
- (B) 3,00.
- (C) 9,00.
- (D) 12,60.
- (E) 13,80.

Agora é com você

03

ENEM 2025

Três dados cúbicos, com faces numeradas de 1 a 6, foram utilizados em um jogo. Artur escolheu dois dados, e João ficou com o terceiro. O jogo consiste em ambos lançarem seus dados, observarem os números nas faces voltadas para cima e compararem o maior número obtido por Artur com o número obtido por João. Vence o jogador que obtiver o maior número. Em caso de empate, a vitória é de João.

O jogador que tem a maior probabilidade de vitória é

- (A) Artur, com probabilidade de $2/3$.
- (B) João, com probabilidade de $4/9$.
- (C) Artur, com probabilidade de $91/216$.
- (D) João, com probabilidade de $91/216$.
- (E) Artur, com probabilidade de $125/216$.

04

ENEM 2024

Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

- (A) $(7!/4!) \times (6!/4!)$
- (B) $[7!/(3! \times 4!)] \times [6!/(2! \times 4!)]$
- (C) $7!/(3! \times 4!) + 6!/(2! \times 4!) + 5!/(1! \times 4!)$
- (D) $[7!/(3! \times 4!) + 6!/(2! \times 4!)] \times [7!/(4! \times 3!) + 6!/(1! \times 5!)] \times [7!/(5! \times 2!) + 6!/(0! \times 6!)]$
- (E) $[7!/(3! \times 4!) \times 6!/(2! \times 4!)] + [7!/(4! \times 3!) \times 6!/(1! \times 5!)] + [7!/(5! \times 2!) \times 6!/(0! \times 6!)]$

GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL



Medir e comparar forma, área e volume, quando o enunciado dá alguns valores e esconde o resto.

24,4%

das questões das últimas 11 edições, somando plana, espacial e analítica. É o maior bloco da prova, e a parte espacial vem crescendo.

POR QUE CAI

A prova prefere contexto de construção, embalagem, terreno e paisagismo, e gosta de problemas de otimização, em que se pergunta a maior área com o mesmo perímetro ou o maior volume com a mesma folha de material. Boa parte das questões traz figura, e a figura nem sempre está em escala.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Área de figuras planas, com composição e decomposição
- ☐ Volume dos sólidos comuns, principalmente prisma e cilindro
- ☐ Perímetro fixo e área máxima, o padrão de otimização mais cobrado
- ☐ Relação entre número de faces, arestas e vértices em poliedro
- ☐ Distância entre pontos no plano cartesiano

AS TRÊS QUE ABREM QUALQUER QUESTÃO

$$A = \pi r^2 \cdot C = 2\pi r$$

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V + F = A + 2$$

NA PRÁTICA

A maior parte dos erros deste bloco vem de calcular corretamente a grandeza errada, porque a pergunta aparece na última linha de um enunciado longo.

Área plana, composição e o perímetro fixo

Quase nenhuma questão de área do ENEM entrega uma figura pronta de fórmula direta. O que ela entrega é uma figura composta, que precisa ser cortada em partes conhecidas, ou uma figura com um pedaço vazado, que precisa ser subtraído.

DECIDA O QUE A PERGUNTA PEDE ANTES DA FÓRMULA

SE O ENUNCIADO FALA EM	O QUE ELE PEDE
cercar, contornar, rodapé, moldura	perímetro
pintar, revestir, azulejar, gramar	área
encher, caber, capacidade, despejar	volume

Um exemplo trabalhado

Uma piscina quadrada de 400 m^2 será cercada por uma calçada de 5 m de largura em todo o contorno. O lado da piscina é $\sqrt{400} = 20 \text{ m}$. A calçada acrescenta 5 m de cada lado, então o quadrado externo tem lado $20 + 5 + 5 = 30 \text{ m}$ e área 900 m^2 . A calçada é o que sobra, $900 - 400 = 500 \text{ m}^2$.

O caminho de somar quatro retângulos e quatro cantos funciona, mas é mais longo e é onde os cantos costumam ser esquecidos.

Perímetro fixo, área máxima

Este é o padrão de otimização que a prova mais repete. Entre polígonos regulares de mesmo perímetro, **quanto mais lados, maior a área**. O triângulo equilátero é o pior, o hexágono é melhor que o quadrado, e o círculo é o melhor de todos.

RETÂNGULO COM PERÍMETRO FIXO

Quando a forma já está fixada em retângulo, a pergunta muda. Entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o **quadrado**. Quando os lados têm custos diferentes, vale a versão geral desse resultado, que está no assunto 05, na página 46.

GUARDE ISTO

Com perímetro fixo, entre polígonos **regulares**, mais lados significa mais área. Se a questão oferece triângulo, quadrado e hexágono regulares, o hexágono ganha antes de qualquer conta.

Volume, capacidade e o material que sobra

Para prisma e cilindro, o volume é sempre a área da base multiplicada pela altura. A diferença entre eles está apenas na forma da base.

SÓLIDO	BASE	VOLUME
prisma reto	polígono	$A_{\text{base}} \cdot h$
cilindro	círculo de raio r	$\pi r^2 h$
pirâmide	polígono	$A_{\text{base}} \cdot h / 3$
cone	círculo de raio r	$\pi r^2 h / 3$

LITRO, MILILITRO E CENTÍMETRO CÚBICO

1 L = 1 000 mL e 1 mL = 1 cm³, logo **1 L = 1 000 cm³**. Também vale **1 m³ = 1 000 L**. Questão de capacidade quase sempre exige uma dessas passagens, e ela costuma ser onde o erro entra.

Mesma folha, volumes diferentes

Uma folha retangular pode virar um cilindro de duas maneiras, enrolando pelo lado maior ou pelo lado menor. Os dois cilindros têm a mesma área lateral e **volumes diferentes**.

FOLHA 6 × 12 CM	CIRCUNF. (CM)	RAIO (CM)	ALTURA (CM)	VOLUME (CM ³)
enrolada pelo lado de 6	6	$3/\pi$	12	$108/\pi$
enrolada pelo lado de 12	12	$6/\pi$	6	$216/\pi$

O segundo é o dobro do primeiro. O raio entra ao quadrado no volume e a altura entra linearmente, então **com a mesma folha** vale mais aumentar o raio do que a altura. Dobrar o raio quadruplica o volume, enquanto dobrar a altura apenas o dobra.

GUARDE ISTO

Com a mesma folha, o cilindro mais gordo e mais baixo tem maior volume, porque o raio entra ao quadrado e a altura não.

Poliedros, faces e o plano cartesiano

Um poliedro convexo obedece à relação de Euler, $V + F = A + 2$, em que V é o número de vértices, F o de faces e A o de arestas. Ela permite achar um desses três valores quando os outros dois são conhecidos.

POLIEDRO	V	F	A	CONFERE
cubo	8	6	12	$8 + 6 = 12 + 2$
prisma hexagonal	12	8	18	$12 + 8 = 18 + 2$
pirâmide de base quadrada	5	5	8	$5 + 5 = 8 + 2$

Justaposição de sólidos

Quando dois sólidos são colados por uma face, essa face **desaparece** da superfície do sólido resultante. Contar faces sem descontar as duas que se encostaram é erro comum.

Um cubo justaposto a uma pirâmide de base quadrada, com a base da pirâmide coincidindo com uma face do cubo. O cubo tem 6 faces e a pirâmide tem 5, somando 11. Mas a face de contato desaparece dos dois lados, então a superfície final tem **9 faces**, sendo 5 quadrados congruentes entre si e 4 triângulos congruentes entre si.

Distância no plano cartesiano

Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , a distância entre eles é

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo formado pelas diferenças de coordenadas.

É o teorema de Pitágoras em outro traje, com o triângulo retângulo escondido entre a diferença dos x e a diferença dos y.

Entre A(1, 2) e B(4, 6), a diferença em x é 3 e em y é 4. A distância é $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Sempre que as diferenças derem 3 e 4, ou 6 e 8, a raiz sai inteira, e a prova gosta desses valores porque dispensam calculadora.

GUARDE ISTO

Ao juntar dois sólidos, a face de contato deixa de existir na superfície. Conte as faces depois da colagem, nunca antes.

Quatro atalhos de geometria

01 Nomeie o que a pergunta quer

Cercar é perímetro, pintar é área, encher é volume. Escreva a palavra antes de abrir qualquer fórmula. A maior parte dos erros deste bloco vem de ter respondido outra pergunta, com a conta certa.

02 Mais lados, mais área

Com perímetro fixo, entre triângulo, quadrado e hexágono regulares, o hexágono sempre vence. Você elimina duas alternativas antes de calcular qualquer coisa.

03 O raio manda mais que a altura

Em cilindro, o raio entra ao quadrado e a altura entra linearmente. Diante de duas formas de montar o mesmo material, a mais larga tem mais volume.

04 Redesenhe com os números por cima

Mesmo quando o enunciado já traz figura, refaça o desenho anotando os valores dados. É nesse redesenho que aparece a parte que precisa ser subtraída, ou o triângulo retângulo que estava escondido.

A figura da prova não está em escala.

Nunca meça no desenho nem compare comprimentos a olho. Use apenas os valores escritos no enunciado.

ENEM 2024

Um jardineiro dispõe de k metros lineares de cerca baixa para fazer um jardim ornamental. O jardim, delimitado por essa cerca, deve ter a forma de um triângulo equilátero, um quadrado ou um hexágono regular. A escolha será pela forma que resulte na maior área.

O jardineiro escolherá a forma de

- (A) hexágono regular, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $k^2\sqrt{3}/24$.
- (B) hexágono regular, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $3k^2\sqrt{3}/2$.
- (C) quadrado, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $k^2/16$.
- (D) triângulo equilátero, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $k^2\sqrt{3}/36$.
- (E) triângulo equilátero, pois a área do jardim, em metro quadrado, será $k^2\sqrt{3}/4$.

Como resolver

- 01** Decida a forma antes de calcular. Com perímetro fixo, mais lados dá mais área, e entre 3, 4 e 6 lados o hexágono vence. Isso já elimina C, D e E.
- 02** Encontre o lado. O perímetro é k e o hexágono tem 6 lados iguais, então cada lado mede $L = k/6$.
- 03** Use a área do hexágono regular. Ele é formado por 6 triângulos equiláteros de lado L , e cada um tem área $L^2\sqrt{3}/4$, então o hexágono tem $3L^2\sqrt{3}/2$.
- 04** Substitua $L = k/6$. Fica $3 \cdot (k^2/36) \cdot \sqrt{3}/2 = k^2\sqrt{3}/24$.

AResposta correta · hexágono regular, área $k^2\sqrt{3}/24$

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Teste a ordem de grandeza. Para $k = 12$, o hexágono tem lado 2 e a área calculada dá cerca de 10,4 m². A alternativa B daria cerca de 374 m², impossível para uma cerca de 12 metros. A B é a mesma fórmula sem substituir L por $k/6$, e existe para quem parar no passo 3.

ENEM 2024

Em uma empresa é comercializado um produto em embalagens em formato de cilindro circular reto, com raio medindo 3 cm, e altura medindo 15 cm. Essa empresa planeja comercializar o mesmo produto em embalagens em formato de cubo, com capacidade igual a 80% da capacidade da embalagem cilíndrica utilizada atualmente.

Use 3 como valor aproximado para π .

A medida da aresta da nova embalagem, em centímetro, deve ser

- (A) 6
- (B) 18
- (C) $6\sqrt{6}$
- (D) $6\sqrt[3]{6}$
- (E) $3\sqrt[3]{12}$

Como resolver

- 01** Calcule o volume do cilindro. $V = \pi r^2 h$, com $r = 3$, $h = 15$ e $\pi \approx 3$, o que dá $3 \cdot 9 \cdot 15 = 405 \text{ cm}^3$.
- 02** Aplique os 80%. O cubo terá $0,80 \times 405 = 324 \text{ cm}^3$.
- 03** Escreva o volume do cubo. Se a aresta é a , então $a^3 = 324$, logo $a = \sqrt[3]{324}$.
- 04** Simplifique o radical. Procure um cubo perfeito dentro de 324. Como $324 = 27 \times 12$ e $27 = 3^3$, sobra $3\sqrt[3]{12}$.

EResposta correta · aresta de $3\sqrt[3]{12}$ centímetros

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Confira a plausibilidade antes de escolher. $\sqrt[3]{324}$ está entre $\sqrt[3]{216} = 6$ e $\sqrt[3]{343} = 7$, então a aresta fica pouco acima de 6 cm. A alternativa A dá exatamente 6, que corresponde a 216 cm^3 e não a 324. A B, 18, daria $5\,832 \text{ cm}^3$. Só a E cai na faixa certa, porque $3\sqrt[3]{12} \approx 6,87$.

As quatro confusões que custam ponto

Responder área quando a pergunta é perímetro

Calcular corretamente a grandeza errada. Acontece quando o enunciado é longo e a pergunta aparece só na última linha. Leia a pergunta antes do texto, se precisar, e nomeie a grandeza pedida antes de abrir qualquer fórmula.

Medir na figura

Comparar dois comprimentos porque um parece maior no desenho, ou supor que um ângulo é reto porque parece reto. A prova não garante escala, e figura fora de escala é recurso comum para separar quem calcula de quem estima pela aparência do desenho.

Esquecer de descontar

Calcular o volume total de um sólido com cavidade, ou a área de uma região com um recorte, sem subtrair a parte que não conta. Em problema de calçada ao redor de piscina, o erro espelhado é somar os quatro lados e esquecer os quatro cantos.

Contar faces antes da colagem

Somar as faces de dois sólidos justapostos sem descontar a face de contato, que deixa de existir. Vale também para arestas e vértices, que se fundem na junção.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

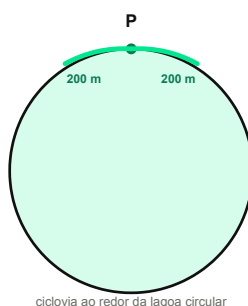
- ☐ A pergunta é sobre cercar, pintar ou encher?
- ☐ Usei só os valores escritos, sem medir nada no desenho?
- ☐ Tem parte oca ou recorte para subtrair?
- ☐ O resultado é plausível para o tamanho descrito no enunciado?

Agora é com você

01

ENEM 2025

No entorno de uma lagoa circular, cujo raio mede 1 km, há uma ciclovia. Devido aos frequentes roubos de bicicleta, a prefeitura planeja alocar policiais em posições estratégicas para patrulhar essa ciclovia, de forma a torná-la totalmente protegida. Um ponto da ciclovia é considerado protegido se houver pelo menos um policial a, no máximo, 200 m de distância daquele ponto, posicionado sobre a ciclovia. Desconsidere a largura da pista da ciclovia e utilize 3 como aproximação para π .



Nessas condições, a quantidade mínima necessária de policiais a serem alocados ao longo dessa ciclovia para torná-la protegida é

- (A) 4.
- (B) 8.
- (C) 15.
- (D) 30.
- (E) 60.

02

ENEM 2024

Um fazendeiro pretende construir um galinheiro ocupando uma região plana de formato retangular, com lados de comprimentos L metro e C metro. Os lados serão cercados por telas de tipos diferentes. Nos lados de comprimento L metro, será utilizada uma tela cujo metro linear custa R\$ 20,00, enquanto, nos outros dois lados, uma que custa R\$ 15,00. O fazendeiro quer gastar, no máximo, R\$ 6 000,00 na compra de toda a tela necessária, e deseja que o galinheiro tenha a maior área possível.

Qual será a medida, em metro, do maior lado do galinheiro?

- (A) 85
- (B) 100
- (C) 175
- (D) 200
- (E) 350

Agora é com você

03

ENEM 2025

Uma fábrica utilizou uma impressora 3D para produzir o protótipo de uma peça. O protótipo tem forma de um poliedro convexo, obtido pela justaposição de dois sólidos distintos, um com a forma de um prisma hexagonal regular reto e o outro com a forma de um tronco de pirâmide hexagonal reta. A base maior do tronco de pirâmide coincide com uma das bases do prisma. Após a impressão, ele foi encaminhado ao setor de customização para a pintura de sua superfície. O critério definido considera que faces congruentes entre si devem ser pintadas com uma mesma cor, e faces não congruentes entre si devem apresentar cores distintas.

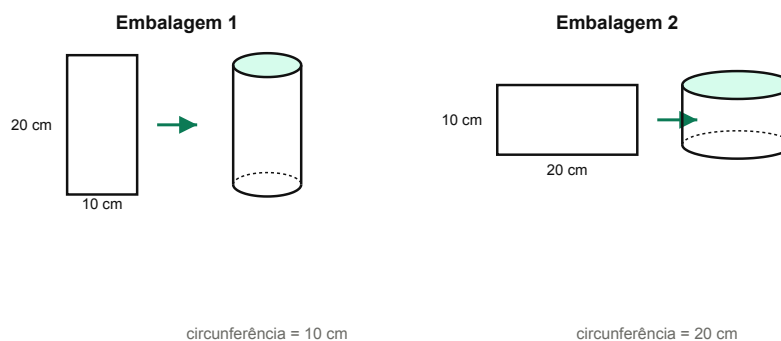
Qual é a quantidade de cores utilizadas para pintar o protótipo?

- (A) 9
- (B) 8
- (C) 6
- (D) 4
- (E) 3

04

ENEM 2024

Uma indústria faz uma parceria com uma distribuidora de sucos para lançar no mercado dois tipos de embalagens. Para a fabricação dessas embalagens, a indústria dispõe de folhas de alumínio retangulares, de dimensões 10 cm por 20 cm. Cada uma dessas folhas é utilizada para formar a superfície lateral da embalagem, em formato de cilindro circular reto, que posteriormente recebe fundo e tampa circulares.



Dentre essas duas embalagens, a de maior capacidade apresentará volume, em centímetro cúbico, igual a

- (A) $4\,000\pi$
- (B) $2\,000\pi$
- (C) $4\,000/\pi$
- (D) $1\,000/\pi$
- (E) $500/\pi$

FUNÇÕES, SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA



Como uma grandeza varia com o tempo ou com a posição, e o que isso permite prever.

13,5%

das questões das últimas 11 edições, somando os três subtemas.

Funções sozinha é estável entre os períodos, o que faz deste um bloco previsível.

POR QUE CAI

Neste bloco a prova deixa de pedir um valor e passa a pedir um comportamento. Progressão aritmética cresce somando sempre a mesma parcela, progressão geométrica e juros compostos crescem multiplicando sempre pelo mesmo fator, e a função afim é a versão contínua da aritmética. O contexto costuma ser conta de consumo, financiamento, crescimento de população ou intensidade de fenômeno físico.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Função afim, e como ler a parte fixa e a parte variável em um enunciado
- ☐ Função quadrática, com o vértice como ponto de máximo ou de mínimo
- ☐ Reconhecer crescimento aditivo e crescimento multiplicativo
- ☐ Juros compostos como fator elevado ao número de períodos
- ☐ Leitura de escala logarítmica, quando o enunciado entrega a fórmula

AS TRÊS QUE ABREM O ASSUNTO

$$f(x) = ax + b$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

NA PRÁTICA

Em algumas questões deste bloco você não precisa calcular a razão da progressão. Basta saber que ela cresce. Reconhecer isso economiza a questão inteira.

Função afim e função quadrática

Uma função afim tem a forma $f(x) = ax + b$. O coeficiente a diz quanto o resultado muda a cada unidade de x , e b é o valor quando x é zero. Em enunciado de prova, esses dois pedaços quase sempre aparecem com nome próprio.

NO TEXTO	NA FÓRMULA
taxa fixa, custo fixo, tarifa base, valor de bombeamento	b
por minuto, por quilômetro, por unidade, por metro cúbico	a

Um aplicativo cobra R\$ 2,00 fixos, mais R\$ 0,26 por minuto e R\$ 1,40 por quilômetro. O valor V de uma corrida com T minutos e D quilômetros é $V = 2,00 + 0,26T + 1,40D$. Repare que o valor fixo entra sozinho, sem multiplicar nada.

Descobrir a função a partir de uma tabela

Com 20 unidades custando R\$ 700,00 e 40 unidades custando R\$ 1 100,00, a variação é de R\$ 400,00 para 20 unidades, logo $a = 20$ reais por unidade. Substituindo, $700 = b + 20 \cdot 20$, o que dá $b = 300$. A função é $C(q) = 300 + 20q$. Confira sempre com um terceiro ponto, quando o enunciado der. Aqui, $C(60) = 300 + 1 200 = 1 500$.

Função quadrática

Uma função quadrática tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e o gráfico dela é uma parábola. O sinal de a decide tudo antes de qualquer conta. Com a positivo ela abre para cima e tem ponto de **mínimo**. Com a negativo ela abre para baixo e tem ponto de **máximo**.

$$x_v = -b / (2a) \quad \cdot \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \cdot \quad x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$$

Vértice e raízes. Em contexto financeiro ou geométrico, a raiz negativa é descartada.

PRODUTO MÁXIMO COM SOMA FIXA

Se dois números positivos têm **soma constante**, o produto deles é máximo quando os dois são **iguais**. Vale também quando a soma é ponderada. Se $2x + 5y$ vale sempre 100, o produto $x \cdot y$ é máximo quando $2x = 5y = 50$, ou seja, $x = 25$ e $y = 10$. É o mesmo resultado que sairia do vértice da parábola, sem precisar montá-la.

GUARDE ISTO

Em função afim, a taxa de variação é a diferença dos valores dividida pela diferença das quantidades. Em função quadrática, o sinal de a diz se o vértice é máximo ou mínimo, antes de qualquer conta.

Somar sempre o mesmo ou multiplicar sempre pelo mesmo

A diferença entre progressão aritmética e geométrica é o tipo de operação que se repete.

	PA	PG
operação repetida	soma de r	multiplicação por q
termo geral	$a_n = a_1 + (n - 1)r$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
contexto típico	acrécimo fixo em reais	acrécimo fixo em porcentagem

COMO DESCOBRIR QUAL É QUAL

Calcule a **diferença** e a **razão** entre os dois primeiros termos, e depois entre o segundo e o terceiro. Se a diferença se repete, é PA. Se a razão se repete, é PG. Não decida pelo formato do enunciado, porque a palavra "acrécimo" aparece nos dois casos, e o que separa é se ele é em valor absoluto ou em porcentagem.

Juros compostos são uma PG

Aplicar uma taxa i sobre o montante acumulado, período após período, é multiplicar repetidamente pelo fator $1 + i$. Por isso $M = C(1 + i)^n$. Em juros **simples**, a taxa incide sempre sobre o capital inicial, e o crescimento é uma PA.

REGIME	CONTA	MONTANTE
simples	$1\,000 + 3 \cdot 100$	R\$ 1 300,00
compostos	$1\,000 \cdot 1,1^3$	R\$ 1 331,00

Parcela futura vale menos que parcela de hoje

Se o dinheiro rende a uma taxa i por período, receber R\$ 100,00 daqui a um período não é o mesmo que receber hoje. Para comparar pagamentos em datas diferentes, traga cada um para a mesma data dividindo por $(1 + i)$ elevado ao número de períodos. É o caminho inverso dos juros compostos, e é o que permite igualar um preço à vista a uma sequência de parcelas.

Quando a razão não precisa ser calculada

Em algumas questões, basta saber que a sequência **cresce**. Se parcelas aumentam a cada mês e alguém vai pagar algumas delas por você, interessa que sejam as mais tardias, porque são as maiores. O valor exato da razão não muda essa conclusão.

GUARDE ISTO

Diferença constante é PA, razão constante é PG. Teste as duas nos primeiros termos antes de escolher a fórmula.

Crescimento exponencial e escala logarítmica

Crescimento exponencial multiplica por um fator fixo a cada intervalo de tempo. Uma população que se multiplica por 10 a cada 3 dias, partindo de P_0 , tem depois de d dias

$$P = P_0 \cdot 10^{(d/3)}$$

O expoente $d/3$ conta quantos intervalos de 3 dias se passaram, e não quantos dias.

Dividir o tempo pelo tamanho do intervalo é o passo que muita gente pula. Uma cultura de bactérias dobra a cada 4 horas, partindo de 500. Quando ela chega a 8 000? Fica $500 \cdot 2^{(t/4)} = 8\,000$, logo $2^{(t/4)} = 16 = 2^4$. Como as bases são iguais, os expoentes também são, então $t/4 = 4$ e **$t = 16$ horas**.

HORAS	INTERVALOS DE 4 HORAS	POPULAÇÃO
0	0	500
4	1	1 000
8	2	2 000
12	3	4 000
16	4	8 000

Logaritmo, quando a prova entrega a fórmula

O ENEM raramente pede que você monte uma expressão logarítmica. Ele entrega a fórmula e cobra substituição correta, mais uma ou duas propriedades.

PROPRIEDADE	USO TÍPICO
$\log X = y$ significa $X = 10^y$	a definição. É ela que tira o log de dentro da conta
$\log 10 = 1$ · $\log 100 = 2$	quando a razão entre duas grandezas é potência de 10
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$	separar um produto dentro do logaritmo
$\log(a^n) = n \cdot \log a$	tirar o expoente para fora

Se $M_2 - M_1 = (2/3) \cdot \log(E_2/E_1)$ e a energia do segundo evento é cem vezes a do primeiro, então $E_2/E_1 = 100$ e $\log 100 = 2$. Logo $M_2 - M_1 = 4/3 \approx 1,33$, e com $M_1 = 5,4$ sai **$M_2 \approx 6,7$** .

GUARDE ISTO

Em crescimento exponencial, o expoente conta intervalos, não unidades de tempo. Divida o tempo total pelo tamanho do intervalo antes de igualar as potências.

Quatro atalhos para grandezas que mudam

01 Separe o fixo do variável na primeira leitura

Sublinhe no enunciado o que é cobrado uma vez só e o que é cobrado por unidade. A função sai montada dessa separação, e o valor fixo nunca multiplica variável nenhuma.

02 Teste diferença e razão, nessa ordem

Antes de decidir entre PA e PG, faça as duas contas nos primeiros termos. É mais rápido que tentar deduzir pelo texto, e não erra.

03 Em juros compostos, monte o fator e eleve

Escreva $(1 + i)$ e eleve ao número de períodos. Multiplicar a taxa pelo número de períodos é exatamente a troca de compostos por simples, e ela dá um número plausível, que é o que torna o erro perigoso.

04 Composto sempre supera simples

Em qualquer prazo maior que um período, juros compostos rendem mais que juros simples sobre o mesmo capital. Calcule o simples de cabeça, que é rápido, e descarte toda alternativa abaixo dele antes de montar a potência.

05 Iguale as bases

Em equação exponencial, escreva os dois lados como potência da mesma base e compare os expoentes. Isso dispensa logaritmo na maioria das questões do ENEM.

Somou sempre igual, é PA. Multiplicou sempre igual, é PG.

E juros compostos são sempre PG, porque a taxa incide sobre o que já cresceu.

ENEM 2023

Um pescador tem um custo fixo diário de R\$ 900,00 com combustível, iscas, manutenção de seu barco e outras pequenas despesas. Ele vende cada quilograma de peixe por R\$ 5,00. Sua meta é obter um lucro mínimo de R\$ 800,00 por dia. Sozinho, ele consegue pescar 180 kg de peixe, o que é suficiente apenas para cobrir o custo fixo diário. Portanto, precisa contratar ajudantes, pagando para cada um R\$ 250,00 por dia de trabalho. Além desse valor, 4% da receita obtida pela venda de peixe é repartida igualmente entre os ajudantes. Considerando o tamanho de seu barco, ele pode contratar até 5 ajudantes. Ele sabe que com um ajudante a pesca diária é de 300 kg e que, a partir do segundo ajudante contratado, aumenta-se em 100 kg a quantidade de peixe pescada por ajudante em um dia de trabalho.

A quantidade mínima de ajudantes que esse pescador precisa contratar para conseguir o lucro diário pretendido é

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

Como resolver

- 01** Monte a quantidade pescada. Com 1 ajudante são 300 kg, e cada ajudante seguinte acrescenta 100 kg. Isso é uma **PA de razão 100**.
- 02** Escreva o lucro. A receita é $R = 5 \times \text{kg}$, e o custo é $900 + 250n + 0,04R$. Logo $L = 0,96R - 900 - 250n$.
- 03** Teste os valores até bater a meta.

AJUDANTES	PEIXE (KG)	RECEITA (R\$)	LUCRO (R\$)
1	300	1 500	290
2	400	2 000	520
3	500	2 500	750
4	600	3 000	980

DResposta correta · **4 ajudantes**

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Repare que os 4% da receita **não** dependem de quantos ajudantes são, porque o enunciado divide os mesmos 4% entre eles. Quem multiplicar os 4% pelo número de ajudantes encontra lucros menores e responde 5. A margem entre 3 e 4 ajudantes é de apenas R\$ 50,00 em relação à meta, então arredondar no meio do caminho troca a resposta.

ENEM 2024

Uma imobiliária iniciou uma campanha de divulgação para promover a venda de apartamentos que podem ser pagos em 100 parcelas mensais. O valor da primeira delas é fixado no momento da compra, com o pagamento dessa primeira parcela. A partir da segunda parcela, o valor é determinado pela aplicação de um acréscimo percentual fixo ao valor da parcela anterior. Como atrativo, a imobiliária fará o pagamento de todas as parcelas correspondentes ao mês de aniversário do comprador.

Um cliente, que faz aniversário no mês de maio, decidiu comprar um desses apartamentos por meio do financiamento oferecido, e pretende escolher o mês mais adequado para realizar essa compra, de modo que o valor total dos pagamentos seja o menor possível.

Qual é o mês que esse cliente deverá escolher para realizar a compra do apartamento?

- (A) Fevereiro.
- (B) Abril.
- (C) Maio.
- (D) Junho.
- (E) Agosto.

Como resolver

- 01** Entenda o que se quer maximizar. O cliente paga menos quando a imobiliária paga mais, e ela paga as parcelas que caem em maio. O objetivo é fazer com que as parcelas de maio sejam as maiores possíveis.
- 02** Note que as parcelas só crescem. O acréscimo percentual é fixo e positivo, então a parcela de número 100 é a maior de todas. **Não é preciso conhecer a taxa.**
- 03** Descubra quando cada parcela cai. Se a compra é no mês M , a parcela de número n cai no mês $M + (n - 1)$.
- 04** Force a última parcela para maio. Queremos que a parcela 100 caia em maio, o que exige que $M + 99$ seja maio.
- 05** Conte os meses. Como $99 = 8 \times 12 + 3$, são 8 anos e 3 meses. Voltando 3 meses a partir de maio, chega-se a **fevereiro**.

AResposta correta · comprar em **fevereiro**

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

A pergunta se reduz a um alvo só, colocar a parcela 100 em maio. Como 99 dividido por 12 deixa resto 3, basta recuar 3 meses. A alternativa C, maio, é a armadilha natural de quem associa a compra ao mês do aniversário. Comprando em maio, a parcela isenta é a primeira, e ela é justamente a menor de todas.

As quatro confusões que custam ponto

Multiplicar o valor fixo por uma variável

Escrever $2,00F + 0,26T$ quando o correto é $2,00 + 0,26T$. O valor fixo é cobrado uma vez por corrida, então ele entra sozinho na expressão. Sublinhe o que é cobrado uma vez só antes de montar.

Calcular juros compostos como simples

Aplicar a taxa sempre sobre o capital inicial em vez de sobre o montante acumulado. Em poucos períodos a diferença é pequena, o resultado parece plausível, e é por isso que o erro passa. Monte o fator $(1 + i)$ e eleve ao número de períodos.

Assumir PA quando é PG

Ver "acréscimo fixo" e concluir que se soma sempre o mesmo valor, quando o enunciado diz acréscimo **percentual** fixo. Percentual sobre o valor anterior é multiplicação, logo é PG. Teste a diferença e a razão nos primeiros termos.

Esquecer de dividir o tempo pelo intervalo

Em crescimento que dobra a cada 5 anos, escrever o expoente como o número de anos em vez do número de intervalos de 5 anos. O expoente conta quantas vezes a multiplicação aconteceu, não quanto tempo passou.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

- ☐ O valor fixo está sozinho na expressão, sem multiplicar variável?
- ☐ Testei diferença e razão antes de escolher entre PA e PG?
- ☐ Em juros, elevei o fator ao número de períodos em vez de multiplicar a taxa?
- ☐ No expoente, contei intervalos e não unidades de tempo?

Agora é com você

01

ENEM 2024

Uma empresa produz mochilas escolares sob encomenda. Essa empresa tem um custo total de produção, composto por um custo fixo, que não depende do número de mochilas, mais um custo variável, que é proporcional ao número de mochilas produzidas. O custo total cresce de forma linear, e a tabela apresenta esse custo para três quantidades produzidas.

QUANTIDADE DE MOCHILAS	30	50	100
CUSTO TOTAL (R\$)	1 050,00	1 650,00	3 150,00

O custo total, em real, para a produção de 80 mochilas será

- (A) 2 400,00.
- (B) 2 520,00.
- (C) 2 550,00.
- (D) 2 700,00.
- (E) 2 800,00.

02

ENEM 2023

Um agricultor é informado sobre um método de proteção para a lavoura que consiste em inserir larvas específicas, de rápida reprodução. A reprodução dessas larvas faz com que sua população multiplique-se por 10 a cada 3 dias e, para evitar eventuais desequilíbrios, é possível cessar essa reprodução aplicando-se um produto X. O agricultor decide iniciar esse método com 100 larvas e dispõe de 5 litros do produto X, cuja aplicação recomendada é de exatamente 1 litro para cada população de 200 000 larvas. A quantidade total do produto X de que ele dispõe deverá ser aplicada de uma única vez.

Quantos dias após iniciado esse método o agricultor deverá aplicar o produto X?

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 12
- (E) 18

Agora é com você**03****ENEM 2023**

Uma loja vende seus produtos de duas formas, à vista ou financiado em três parcelas mensais iguais. Para definir o valor dessas parcelas nas vendas financiadas, a loja aumenta em 20% o valor do produto à vista e divide esse novo valor por 3. A primeira parcela deve ser paga no ato da compra, e as duas últimas, em 30 e 60 dias após a compra. Um cliente da loja decidiu comprar, de forma financiada, um produto cujo valor à vista é R\$ 1 500,00. Utilize 5,29 como aproximação para $\sqrt{28}$.

A taxa mensal de juros compostos praticada nesse financiamento é de

- (A) 6,7%
- (B) 10%
- (C) 20%
- (D) 21,5%
- (E) 23,3%

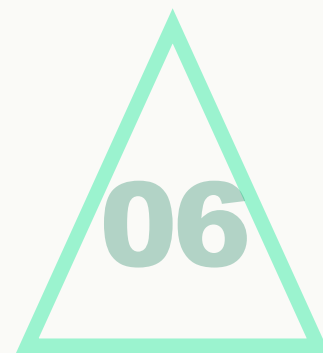
04**ENEM 2025**

Um empresário utiliza máquinas cuja pressão interna P , em atmosfera, depende do tempo contínuo de utilização t , em hora, e de um parâmetro positivo K , que define o modelo da máquina, segundo a expressão $P = 4 \cdot \log[-K \cdot (t + 1) \cdot (t - 19)]$. O fabricante recomenda que a pressão interna não ultrapasse 10 atmosferas durante o funcionamento. O empresário pretende comprar novas máquinas que deverão funcionar, diariamente, por um período contínuo de 10 horas, e precisa definir o modelo escolhendo o maior valor possível do parâmetro K , atendendo à recomendação do fabricante.

O maior valor a ser escolhido para K é

- (A) $10^{0,5}$
- (B) 10^8
- (C) $10^{2,5/84}$
- (D) $10^{2,5/99}$
- (E) 25×10^{-2}

ESTATÍSTICA E LEITURA DE GRÁFICOS E TABELAS



Ler e resumir um conjunto de dados antes de calcular qualquer coisa.

15%

das questões das últimas 11 edições, somando estatística e leitura de gráficos. A parte de leitura de gráficos foi a que mais cresceu no período recente.

POR QUE CAI

Este assunto fecha a apostila porque ele usa os outros cinco. Um gráfico de setores pede porcentagem, uma tabela de preços pede razão, uma curva de crescimento pede função. A prova traz contexto de pesquisa de opinião, saúde pública e indicador econômico, e a armadilha raramente está na conta. Ela está em ler o eixo errado, comparar barras pelo tamanho aparente ou escolher a medida de resumo que não responde à pergunta.

O QUE ESTUDAR PRIMEIRO

- ☐ Média simples e média ponderada, e quando cada uma se aplica
- ☐ Mediana, e por que ela resiste a valor extremo
- ☐ Moda, inclusive em tabela de frequência
- ☐ Leitura de gráfico de barras, linhas e setores, sempre pelos valores do eixo
- ☐ Tendência ao longo do tempo, e o que uma reta de ajuste permite estimar

AS DUAS CONTAS DO ASSUNTO

$$\text{média} = \text{soma} / \text{quantidade}$$

$$\text{ponderada} = \Sigma(\text{valor} \times \text{freq}) / \Sigma \text{freq}$$

NA PRÁTICA

Mediana e moda não têm fórmula, têm procedimento. Ordenar antes de procurar o meio e contar antes de apontar o mais frequente resolvem a maior parte das questões do bloco.

As três medidas de resumo, e quando cada uma serve

Média, mediana e moda respondem a perguntas diferentes sobre o mesmo conjunto.

MEDIDA	O QUE ELA DIZ	SENSÍVEL A VALOR EXTREMO
média	o valor que todos teriam se o total fosse repartido igualmente	sim
mediana	o valor que divide o conjunto ao meio	não
moda	o valor que mais aparece	não

A MEDIANA EXIGE ORDENAR

Antes de encontrar a mediana, **ordene os dados**. Pegar o valor do meio da lista como ela veio escrita é erro garantido, e é o mais comum do subtema. Com quantidade **ímpar** de valores, a mediana é o do meio. Com quantidade **par**, é a média dos dois centrais.

Um exemplo trabalhado

Estas são as temperaturas máximas de seis dias, na ordem em que foram medidas. São elas 31, 28, 35, 27, 33, 28. Ordenando, fica 27, 28, 28, 31, 33, 35. São seis valores, então a mediana é a média do terceiro com o quarto, ou seja, **29,5 °C**. A moda é 28 °C, porque aparece duas vezes. A média é 30,3 °C. As três dão respostas diferentes, e a pergunta decide qual delas interessa.

Quando a média engana

Se um conjunto tem um valor muito distante dos demais, a média se desloca na direção dele e deixa de representar o típico. A mediana não se move. É por isso que se fala em renda mediana, e não em renda média, quando se quer descrever a situação de quem está no meio.

GUARDE ISTO

Ordene antes de procurar a mediana. E quando houver um valor muito fora do padrão dos outros, desconfie da média e verifique o que a mediana diz.

Média ponderada e tabela de frequência

Quando cada valor aparece um número diferente de vezes, a média simples dos valores distintos está errada. É preciso pesar cada valor pela quantidade de vezes que ele ocorre.

$$\text{média ponderada} = \Sigma(\text{valor} \times \text{frequência}) / \Sigma \text{frequência}$$

A frequência é quantas vezes cada valor aparece, e ela nunca some da conta.

Uma escola registrou quantos livros cada um dos 80 alunos leu no semestre.

LIVROS LIDOS	0	1	2	3	4
ALUNOS	8	12	30	18	12

A **moda** é 2 livros, porque é o valor com mais alunos. A **mediana** exige localizar as posições 40 e 41, já que são 80 valores. Acumulando as frequências, chega-se a 8, depois 20, depois 50, então as duas posições caem na faixa de 2 livros, e a mediana também é 2. A **média** é 174 dividido por 80, ou seja, **2,175**. Nesse conjunto, moda e mediana empatam e a média fica acima das duas.

COMO LOCALIZAR A MEDIANA EM TABELA DE FREQUÊNCIA

- 01** Some as frequências para achar o total N
- 02** Localize as posições $N/2$ e $N/2 + 1$, se N for par
- 03** Acumule as frequências até passar dessas posições
- 04** O valor da linha em que isso acontece é a mediana

GUARDE ISTO

Em tabela de frequência, o que se ordena são as ocorrências, não as linhas. Acumule as frequências para achar onde cai a posição central.

Ler gráfico sem cair na aparência

Gráfico é feito para comunicar rápido, e por isso é fácil de enganar. A regra é simples e vale para todos os tipos. **Leia os valores do eixo antes de comparar qualquer coisa.**

TIPO	SERVE PARA	CUIDADO
barras ou colunas	comparar categorias	escala que não começa em zero exagera diferenças
linhas	mostrar evolução no tempo	intervalos desiguais distorcem a inclinação
setores	mostrar composição de um total	fatias parecidas são difíceis de ordenar no olho
dispersão	relacionar duas variáveis	ponto isolado chama mais atenção do que merece

A ESCALA QUE NÃO COMEÇA EM ZERO

Um gráfico de barras cujo eixo vertical começa em 40 faz uma diferença de 5 unidades parecer enorme. A barra que aparenta ter o dobro da altura da outra pode representar apenas 10% a mais. Confira o valor inicial do eixo antes de qualquer comparação visual.

Tendência e estimativa

Quando pontos de um gráfico se espalham em torno de uma reta, essa reta descreve a tendência e permite estimar valores fora do período observado. Leia dois pontos **da reta**, e não dos dados. Calcule a variação por unidade de tempo entre eles. Prolongue essa variação até o instante pedido.

Uma reta que passa por cerca de 2,0 milhões em 2015 e 5,0 milhões em 2020 sobe 3,0 milhões em 5 anos, ou seja, 0,6 milhão por ano. Para estimar 2024, quatro anos após 2020, some $4 \times 0,6 = 2,4$ ao valor de 2020, chegando a aproximadamente **7,4 milhões**.

GUARDE ISTO

Leia o eixo antes de comparar. O desenho distorce, o valor escrito no eixo não.

Quatro atalhos para ler dado

01 Comece pelo eixo

Antes de olhar para a forma das barras ou da curva, leia o que está escrito nos dois eixos e onde a escala começa. Trinta segundos aqui evitam a maioria dos erros do assunto.

02 Ordene antes de procurar o meio

Mediana só existe em conjunto ordenado. Reescreva os valores em ordem crescente, mesmo que pareça perda de tempo. É o passo que mais gente pula e o que mais derruba.

03 Peso aparece disfarçado

Sempre que a questão trazer "quantos alunos", "quantas vezes" ou "número de pessoas" ao lado de cada valor, a média é ponderada. Média simples nesses casos ignora justamente a informação que a questão deu.

04 Em pergunta de qual gráfico, teste dois pontos

Calcule o valor no primeiro e no último instante e compare com as alternativas. Costuma sobrar uma. Conferir os cinco pontos de cinco gráficos é trabalho desnecessário.

Ordene para a mediana, pese para a média, conte para a moda.

Cada medida exige uma preparação diferente dos dados, e pular a preparação é o erro.

ENEM 2024

Ao calcular a média de suas notas em 4 provas, um estudante dividiu, por engano, a soma das notas por 5. Com isso, a média obtida foi 1 unidade menor do que deveria ser, caso fosse calculada corretamente.

O valor correto da média das notas desse estudante é

- (A) 4.
- (B) 5.
- (C) 6.
- (D) 19.
- (E) 21.

Como resolver

- 01** Dê nome ao que não se conhece. Chame de **S** a soma das quatro notas. Ela é a mesma nos dois cálculos, o correto e o errado.
- 02** Escreva a média correta. São 4 provas, então ela é **$S/4$** .
- 03** Escreva a média errada. Ele dividiu por 5, então obteve **$S/5$** .
- 04** Traduza a relação. A média errada ficou 1 unidade menor que a correta, ou seja, $S/5 = S/4 - 1$.
- 05** Resolva. Multiplicando tudo por 20, fica $4S = 5S - 20$, logo **$S = 20$** .
- 06** Volte à pergunta. Ela pede a média, não a soma, então a resposta é $20/4 = 5$.

B

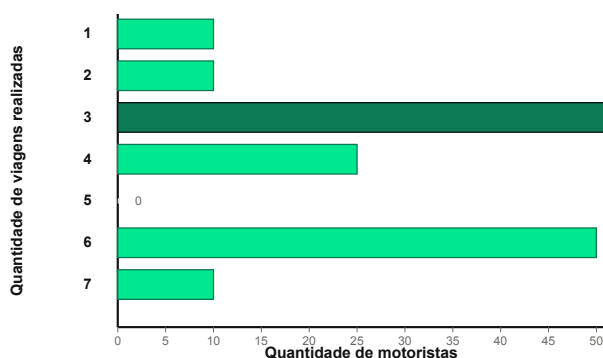
Resposta correta · a média correta é 5

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

A diferença entre dividir por 4 e por 5 é sempre uma fração da soma. Como $S/4 - S/5 = S/20$, e essa diferença vale 1, sai direto $S = 20$ e a média correta é 5. Repare que a alternativa D, 19, é a soma menos 1, e a E, 21, é a soma mais 1. As duas existem para quem responder com S em vez da média.

ENEM 2023

Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.



Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se

- (A) mediana = média < moda.
- (B) mediana = moda < média.
- (C) mediana < média < moda.
- (D) moda < média < mediana.
- (E) moda < mediana < média.

Como resolver

- 01** Confirme o total. Somando as barras, $10 + 10 + 55 + 25 + 0 + 50 + 10 = 160$, que bate com o enunciado. Essa conferência protege contra erro de leitura do gráfico.
- 02** Encontre a moda. A maior barra é a de 3 viagens, com 55 motoristas, então **moda = 3**.
- 03** Encontre a mediana. São 160 valores, então ela é a média das posições 80 e 81. Acumulando, chega-se a 10, 20, 75 e 100, então as duas posições caem em 4 viagens, logo **mediana = 4**.
- 04** Calcule a média. Ponderando, a soma dá 665, e 665 dividido por 160 é **cerca de 4,16**.
- 05** Ordene as três. Fica $3 < 4 < 4,16$, ou seja, moda menor que mediana, menor que média.

EResposta correta · **moda < mediana < média**

O CAMINHO MAIS RÁPIDO

Não é preciso calcular a média exata. Basta perceber que existe um grupo grande em 6 viagens, com 50 motoristas, que puxa a média para cima sem deslocar a mediana. Como a maior barra está em 3, que é o menor dos três valores, a ordem se fecha sozinha.

As quatro confusões que custam ponto

Procurar a mediana sem ordenar

Pegar o valor central da lista na ordem em que ela foi escrita. A mediana só existe depois da ordenação, e o enunciado quase nunca entrega os dados já ordenados. O valor errado que sai desse atalho costuma estar entre as alternativas.

Calcular média simples quando ela é ponderada

Somar os valores distintos e dividir pela quantidade de linhas da tabela, ignorando as frequências. Isso trata um valor que ocorre 55 vezes como se tivesse o mesmo peso de um que ocorre 10 vezes.

Comparar barras pelo tamanho aparente

Concluir que uma barra representa o dobro da outra porque parece o dobro. Se a escala não começa em zero, a diferença visual não corresponde à diferença numérica. Leia os valores antes de comparar.

Confundir valor com frequência na tabela

Em tabela de frequência, responder com a coluna errada. A moda é o **valor** que mais se repete, não o número de repetições dele. Na tabela de viagens, a moda é 3 viagens, e não 55 motoristas.

CHECAGEM DE 30 SEGUNDOS, ANTES DE MARCAR

- ☐ Ordenei os dados antes de procurar a mediana?
- ☐ A tabela tem frequência? Se tem, usei média ponderada?
- ☐ Li o valor inicial do eixo antes de comparar barras?
- ☐ Respondi com o valor ou com a frequência dele?

Agora é com você

01

ENEM 2024

A umidade relativa do ar é um dos indicadores utilizados na meteorologia para fazer previsões sobre o clima. O quadro apresenta as médias mensais, em porcentagem, da umidade relativa do ar em um período de seis meses consecutivos em uma cidade.

MESES	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.
UMIDADE RELATIVA (%)	66	64	54	46	60	64

Nessa cidade, a mediana desses dados, em porcentagem, da umidade relativa do ar no período considerado foi

- (A) 56.
- (B) 58.
- (C) 59.
- (D) 60.
- (E) 62.

02

ENEM 2023

O gerente de uma fábrica pretende comparar a evolução das vendas de dois produtos similares, I e II. Para isso, passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um desses produtos em cada mês. Os resultados, para os meses de abril a junho, são apresentados na tabela. O gerente estava decidido a cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II. Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas se manteve, mês a mês, como no período representado.

PRODUTO	ABRIL	MAIO	JUNHO
I	80	90	100
II	190	170	150

Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

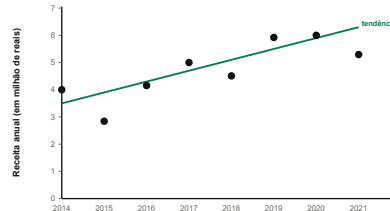
- (A) Junho.
- (B) Julho.
- (C) Agosto.
- (D) Setembro.
- (E) Outubro.

Agora é com você

03

ENEM 2024

As receitas anuais obtidas por uma indústria no período de 2014 a 2021, em milhão de reais, foram registradas, por pontos, em um gráfico. Nele, também está representada a reta que descreve a tendência de evolução das receitas, que pode ser utilizada para estimar as receitas dos anos seguintes.



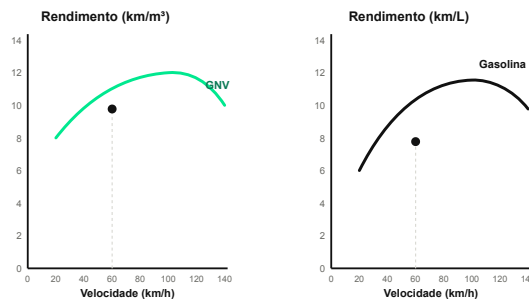
A estimativa da receita, em milhão de reais, dessa indústria, para o ano de 2026, obtida a partir dessa reta de tendência, é

- (A) 7.
- (B) 8.
- (C) 9.
- (D) 10.
- (E) 11.

04

ENEM 2025

Uma pessoa tem um carro bicomcombustível, que funciona a gás natural veicular (GNV) e a gasolina. O rendimento do carro, medido em km/m^3 no caso do gás, ou em km/L no caso da gasolina, depende, entre outros fatores, da velocidade em que o carro trafega. Essa relação está em conformidade com estes gráficos.



Durante um feriado, essa pessoa realizou uma viagem de 240 km, mantendo velocidade constante de 60 km/h. Durante metade do caminho foi utilizado apenas GNV e, na outra metade, apenas gasolina. O metro cúbico de GNV custou R\$ 2,00 e o litro de gasolina, R\$ 3,00.

Qual foi a diferença, em real, entre os gastos totais com gasolina e com GNV?

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 14
- (D) 21
- (E) 30

TUDO QUE VOCÊ PRECISA DECORAR

O ENEM entrega quase todo dado numérico dentro do enunciado. Esta seção reúne o que ele **não** entrega, e que por isso precisa sair de você na hora da prova.

ASSUNTO 01 · NÚMEROS, OPERAÇÕES E RACIOCÍNIO

$$a \times 10^n, \text{ com } 1 \leq a < 10$$

Notação científica. A mantissa é a , e o expoente n é a ordem de grandeza

$$10^m \times 10^n = 10^{(m+n)} \quad \cdot \quad 10^m \div 10^n = 10^{(m-n)}$$

Soma os expoentes na multiplicação, subtraia na divisão

$$1 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{ mm} \quad \cdot \quad 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

Prefixos de comprimento, os mais cobrados

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \quad \cdot \quad 1 \text{ dia} = 1\,440 \text{ min}$$

Converta o tempo antes de montar a conta, nunca durante

$$a \frac{b}{c} = (a \cdot c + b) / c$$

Número misto para fração imprópria. Cuidado para não ler como potência

ASSUNTO 02 · RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS

$$a/b = c/d \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Proporção direta. Multiplique em cruz

$$a \cdot b = c \cdot d$$

Proporção inversa. Multiplique na horizontal, sem cruzar

$$\text{comprimento } k \quad \cdot \quad \text{área } k^2 \quad \cdot \quad \text{volume } k^3$$

Escala. O expoente é o número de dimensões da grandeza pedida

$$\text{velocidade} = \text{distância} / \text{tempo} \quad \cdot \quad \text{vazão} = \text{volume} / \text{tempo}$$

Grandezas compostas. A unidade já mostra a divisão

Porcentagem, contagem e chance

ASSUNTO 03 · PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA

$$\text{aumento de } i\% \rightarrow \text{fator } (1 + i/100)$$

Desconto de $i\%$ vira fator $(1 - i/100)$. Multiplique fatores, nunca some percentuais

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Princípio multiplicativo. n_i é o número de opções da etapa i

$$A(n, p) = n! / (n - p) !$$

Arranjo, quando trocar a ordem muda o resultado

$$C(n, p) = n! / [p! (n - p) !]$$

Combinação, quando trocar a ordem não muda o resultado

$$P = \text{casos favoráveis} / \text{casos possíveis}$$

Probabilidade simples, com casos igualmente prováveis

$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$

Complementar. É o atalho de qualquer pergunta com "pelo menos um"

ASSUNTO 04 · GEOMETRIA PLANA

$$A = b \cdot h$$

Área do retângulo. b é a base e h é a altura

$$A = L^2 \sqrt{3}/4 \quad \cdot \quad A = 3L^2 \sqrt{3}/2$$

Triângulo equilátero e hexágono regular, ambos de lado L

$$A = \pi r^2 \quad \cdot \quad C = 2\pi r$$

Área do círculo e comprimento da circunferência de raio r

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Pitágoras, com a na hipotenusa e b e c nos catetos. É a base da distância entre dois pontos

Volume, funções e progressões

ASSUNTO 04 · GEOMETRIA ESPACIAL E ANALÍTICA

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

Volume de prisma e de cilindro

$$V = A_{\text{base}} \cdot h / 3$$

Volume de pirâmide e de cone. O terço é o que muda

$$V + F = A + 2$$

Euler em poliedro convexo. V vértices, F faces, A arestas, sem relação com o A de área

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distância entre dois pontos no plano cartesiano

$$1 \text{ L} = 1\,000 \text{ mL} = 1\,000 \text{ cm}^3 \quad \cdot \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$$

Conversões de capacidade, onde mais se erra

soma fixa → produto máximo com parcelas iguais

Otimizar área com perímetro ou custo fixo, sem montar a parábola

ASSUNTO 05 · FUNÇÕES E PROGRESSÕES

$$f(x) = ax + b \quad \cdot \quad a = \Delta y / \Delta x$$

Função afim. a é a taxa de variação e b é o valor fixo

$$x_v = -b / (2a)$$

Vértice da parábola. a positivo dá mínimo, a negativo dá máximo

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \cdot \quad x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$$

Raízes da equação do segundo grau

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \quad \cdot \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Termo geral da PA e da PG

Juros, crescimento e estatística

ASSUNTO 05 · MATEMÁTICA FINANCEIRA E CRESCIMENTO

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Juros compostos. C é o capital, i a taxa por período e n o número de períodos

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

Juros simples, para comparação. A taxa incide sempre sobre o capital inicial

$$VP = VF \div (1 + i)^n$$

Valor presente. Traz uma parcela futura para hoje, e permite comparar pagamentos em datas diferentes

$$P = P_0 \cdot q^{(t/T)}$$

Crescimento exponencial. T é o intervalo em que a grandeza multiplica por q

$$\log X = y \Leftrightarrow X = 10^y$$

A definição. Use quando precisar tirar o logaritmo de dentro de uma desigualdade

$$\log 10 = 1 \quad \cdot \quad \log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad \cdot \quad \log(a^n) = n \cdot \log a$$

As três propriedades que o ENEM realmente usa

ASSUNTO 06 · ESTATÍSTICA E GRÁFICOS

$$\text{média} = \text{soma dos valores} / \text{quantidade}$$

Média simples, quando cada valor aparece uma vez

$$\text{média ponderada} = \Sigma(\text{valor} \times \text{frequência}) / \Sigma \text{frequência}$$

Quando a tabela traz quantas vezes cada valor aparece

$$\text{mediana} = \text{valor central, com os dados ORDENADOS}$$

Com quantidade par de valores, é a média dos dois centrais

$$\text{taxa} = \Delta \text{valor} / \Delta \text{tempo}$$

Inclinação de reta de tendência, para estimar valor futuro

UMA OBSERVAÇÃO SOBRE ESTE FORMULÁRIO

Toda fórmula usada nas 36 questões desta apostila está nestas quatro páginas, incluindo a definição de logaritmo e o valor presente, que aparecem em uma questão cada. Se você travar em um exercício e não achar aqui a ferramenta que falta, o problema é de leitura do enunciado, e não de fórmula esquecida.

CONFIRA O QUE VOCÊ RESPONDEU

O comentário abaixo não é resolução completa. Ele traz o suficiente para você entender onde errou. Se um item continuar confuso depois de lido, volte à página de teoria daquele assunto.

Assunto 01 · Números, operações e raciocínio

- B** Basta subtrair, com atenção às casas decimais. $10,00 - 9,58 = 0,42$ segundo.
- E** O tempo de espera é o tempo por atendimento vezes o número de pessoas na fila. Dá 60, 54, 30, 30 e 27 minutos. O menor é o **caixa V**, que não tem nem a fila mais curta nem o atendimento mais rápido.
- E** Some os três produtos em cada autoescola. A I dá 1 400, a II dá 1 300 e a III dá **1 200**. As alternativas B e D trazem custos parciais, de quem esqueceu de multiplicar pelo número de aulas.
- B** O enunciado diz que $a - v = v + 0,05$, logo $a = 2v + 0,05$. Como $18a + 9v = 32,40$, ou seja, $2a + v = 3,60$, substituindo sai $5v = 3,50$ e $v = 0,70$. A cartela tem 9 tíquetes, então custa **R\$ 6,30**.

Assunto 02 · Razão, proporção e regra de três

- C** Em uma semana o carro roda 210 km, e a 1 m³ a cada 13 km isso dá cerca de 16,15 m³. Como o preço é proporcional à capacidade, o mais barato que serve é o menor que cobre 16,15, ou seja, **17 m³**.
- D** A primeira piscina leva cerca de 416,7 minutos. Um tempo 20% maior é 500 minutos, então a vazão da segunda é $2\,750\,000 \div 500 = 5\,500$ L/min. Repare que a vazão caiu, apesar de a piscina ser maior.
- B** Em 60 dias há 86 400 minutos, e acionando a cada 48 minutos são 1 800 acionamentos. Cada um libera $360 \div 1\,800 = 0,2$ mL.
- A** A proporção é de 5 folhas por aluno, então 1 150 alunos pedem 5 750 folhas, ou 58 embalagens, já que não se compra meia. O custo é R\$ 232,00, e para caber nos R\$ 220,00 o desconto precisa ser de cerca de **5,17%**.

Assuntos 03 e 04

Assunto 03 · Porcentagem, probabilidade e combinatória

- B** Reciclar custa R\$ 500,00 por tonelada, e isso é 5% do custo pelo petróleo, que portanto é R\$ 10 000,00. O custo atual é R\$ 1 140 000,00 para 190 toneladas, e ele precisa cair para no máximo R\$ 570 000,00. Resolvendo $1\,900\,000 - 9\,500r \leq 570\,000$, sai $r \geq 140$.
- B** A probabilidade atual em um semáforo é 0,25. Para que os dois juntos deem 0,04, cada um precisa valer 0,2, o que leva o tempo a 12 segundos. A redução é de **3 segundos**.
- E** Artur perde apenas quando os dois dados dele saem menores ou iguais ao de João. A chance de João vencer é $(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/216 = 91/216$, então Artur vence com **125/216**. Dois dados contra um compensam a vantagem do empate.
- E** Os casos são 3 cardiologistas com 2 neurologistas, 4 com 1, e 5 com nenhum. Dentro de cada caso as escolhas se multiplicam, e entre os casos elas se somam. A alternativa D troca as somas pelas multiplicações.

Assunto 04 · Geometria plana e espacial

- C** O comprimento da ciclovia é $2 \cdot 3 \cdot 1\,000 = 6\,000$ m. Cada policial protege 400 m, somando os 200 m de cada lado, então são **15 policiais**.
- B** O custo dá $4L + 3C = 600$, e a área $L \cdot C$ é máxima quando as duas parcelas se igualam, ou seja, $4L = 3C = 300$, o que dá $L = 75$ e $C = 100$. O maior lado mede **100 m**.
- D** A face de contato desaparece. Sobram o hexágono livre do prisma, os seis retângulos, os seis trapézios e o hexágono menor, ou seja, **quatro grupos** de faces congruentes.
- D** Enrolando pelo lado de 10 cm como circunferência o volume é $500/\pi$, e pelo lado de 20 cm é **$1\,000/\pi$** . O raio entra ao quadrado e a altura apenas linearmente.

Assuntos 05 e 06

Assunto 05 · Funções, sequências e matemática financeira

- C** De 30 para 50 mochilas o custo sobe R\$ 600,00 para 20 unidades, então cada mochila custa R\$ 30,00 e o custo fixo é R\$ 150,00. Logo $C(80) = 150 + 2 \cdot 400 = \text{R\$ } 2 \, 550,00$. A alternativa A é a resposta de quem esquece o custo fixo.
- D** A população é $100 \cdot 10^{(d/3)}$, e a aplicação ocorre em 1 000 000 de larvas. Então $10^{(d/3)} = 10^4$, logo $d/3 = 4$ e $d = 12$ dias. A alternativa B é de quem esquece de multiplicar pelos 3 dias do intervalo.
- D** O valor financiado é R\$ 1 800,00 em três parcelas de R\$ 600,00, e a primeira é paga no ato. Igualando a valor presente e chamando $x = 1/(1+i)$, sobra $2x^2 + 2x - 3 = 0$, cuja raiz positiva é 0,8225. Isso dá uma taxa de aproximadamente 21,6%, e a alternativa mais próxima é **21,5%**. A alternativa C, 20%, é o acréscimo aplicado pela loja, e ele não é a taxa de juros, porque parte do pagamento é feita à vista.
- A** A condição vira $-K(t+1)(t-19) \leq 10^2,5$. A expressão $(t+1)(19-t)$ atinge o máximo em $t = 9$, valendo 100, então $100K \leq 10^2,5$ e $K \leq 10^0,5$. As alternativas C e D vêm de calcular nas pontas do intervalo em vez de procurar o máximo.

Assunto 06 · Estatística e leitura de gráficos e tabelas

- E** Ordenando, fica 46, 54, 60, 64, 64, 66. Como a quantidade é par, a mediana é a média dos dois centrais, ou seja, **62**. Quem pegar o valor do meio sem ordenar encontra 54, que nem está entre as alternativas.
- D** O produto I sobe 10 por mês e o II cai 20. Em agosto seriam 120 contra 110, quando o I passa o II pela primeira vez. Como a produção cessa no mês seguinte, a resposta é **setembro**. A alternativa C é de quem para no mês da ultrapassagem.
- B** Leia dois pontos da reta, e não dos dados. Ela sobe cerca de 2,8 em 7 anos, ou seja, 0,4 por ano. De 2021 a 2026 são 5 anos, então some 2,0 aos 6,3, chegando a cerca de **8**.
- D** A 60 km/h os gráficos dão cerca de 10 km/m³ para o GNV e 8 km/L para a gasolina. Cada metade tem 120 km, então são 12 m³ a R\$ 2,00, ou R\$ 24,00, contra 15 L a R\$ 3,00, ou R\$ 45,00. A diferença é **R\$ 21,00**.

E AGORA, O QUE FAZER COM ISTO

Você terminou seis assuntos que cobrem os treze tópicos identificados pela análise de 11 edições do ENEM, e que juntos respondem por mais de 90% das questões de Matemática da prova. O que fica de fora do material é profundidade dentro de cada tópico, e não tópico de peso que tenha sido ignorado.

- 01 Refaça as questões que você errou, alguns dias depois.** Sem olhar o gabarito antes. Se errar de novo, o problema está na teoria, e não na atenção.
- 02 Resolva provas completas com o relógio ligado.** A prova de Matemática tem 45 questões, e administrar o tempo é uma habilidade separada de saber o conteúdo.
- 03 Volte ao formulário até não precisar mais dele.** Quando você souber de cabeça o que está em cada uma das quatro páginas, já não vai precisar consultar.
- 04 Misture assuntos no mesmo dia.** A prova não separa as questões por capítulo, e o seu treino também não deveria.

CONTINUE ESTUDANDO COM A DESCOMPLICA

Esta apostila é uma das peças da série que a Descomplica publica por matéria. Para continuar, procure o material de estudo da próxima matéria da sua lista.